УДК 519.216:004.93

М.В. Полякова, канд. техн. наук,
В.Н. Крылов, д-р техн. наук, проф.,
Одес. нац. политехн. ун-т

ХАРАКТЕРИСТИКА ЛОКАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИЙ

М.В. Полякова, В.М. Крилов. **Характеристика локальної регулярності функції за допомогою узагальнених вейвлет-функцій.** Визначено поняття узагальненої вейвлет-функції. Доведено теореми, які характеризують локальну регулярність функції за допомогою узагальнених вейвлет-функцій.

M.V. Polyakova, V.N. Krylov. **The characterization of local regularity of function with tempered distribution wavelet help.** The notion of tempered distribution wavelet is defined. The theorems which characterize the local regularity of function with tempered distribution wavelets help are proved.

При анализе изображений скачкообразные изменения его интенсивности позволяют локализовать контуры распознаваемых объектов, несущих наиболее существенную информацию. Скачкообразные изменения интенсивности изображения могут быть обнаружены путем оценки локальной регулярности функции, характеризующей зависимость интенсивности от пространственной координаты. Локальная регулярность таких функций характеризуется показателем Гельдера, который определяется следующим образом [1].

Вещественная функция $f(x)$ принадлежит пространству $C^{\alpha}(x_0)$, $\alpha>-1$, если существует полином $P(x)$ порядка по крайней мере α такой, что

$$\left|f(x)-P(x-x_0)\right|\le C\left|x-x_0\right|^{\alpha}, \tag{1}$$

где C — постоянная.

Супремум всех значений α, для которых выполнено (1), называется показателем Гельдера функции $f(x)$ в точке x_0.

В случае $\alpha\in(0,1)$ условие (1) принимает вид

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\le C\left|x-x_0\right|^{\alpha}. \tag{2}$$

Однородная регулярность функции при нецелых α состоит в том, чтобы условие (1) выполнялось для всех x_0 при едином значении постоянной C.

Оценка локальной регулярности функции может быть получена с помощью вейвлет-преобразования — разложения сигнала на составляющие, которые локализованы в пространстве и по частоте. Известны базовые теоремы, которые связывают значения показателя Гельдера функции с изменением значений вейвлет-коэффициентов в зависимости от масштаба и сдвига преобразования [2]. Эти теоремы, доказанные для ограниченных по величине вейвлетов, показывают, что локальная регулярность функции может быть охарактеризована коэффициентами непрерывного вейвлет-преобразования. При решении практических задач используют метод многомасштабных контуров, основанный на определении локальных экстремумов вейвлет-преобразования [3], который, однако, не позволяет достаточно точно локализовать контуры. Известно вейвлет-преобразование с дельта-функцией — обобщенной функцией, хорошо локализованой в пространстве [4, 5]. Под обобщенными понимаются функции, которые не могут быть корректно определены в рамках классической теории функций. Для их использования при решении задачи контурной сегментации изображений с помощью вейвлет-преобразования необходимо определить понятие “обобщенная вейвлет-функция”, а также оценить в терминах коэффициентов преобразования с ней локальную регулярность функции.

Получена оценка локальной регулярности функции с помощью коэффициентов преобразования с обобщенными вейвлет-функциями.

Решены следующие задачи:

— разработано понятие обобщенной вейвлет-функции;

— определено непрерывное преобразование с обобщенными вейвлет-функциями;

— получена характеристика локальной регулярности функции с помощью коэффициентов преобразования с обобщенными вейвлет-функциями.

При решении конкретных задач обработки изображений дельта-функции и другие обобщенные функции используются, в основном, на промежуточных этапах, на заключительном этапе они отсутствуют или стоят под знаком интеграла в произведении с регулярной функцией.

Поэтому при определении обобщенных функций прежде всего задается совокупность тех функций, на которых будут действовать обобщенные. Рассмотрим множество *K* всех вещественных функций $\varphi(x)$, каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т.е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области, своей для каждой. Функции $\varphi(x)$ называются основными, а *K* — основным пространством.

Обобщенная функция $\psi(x)$ на пространстве *K* — это линейный непрерывный функционал из *K* в пространство вещественных чисел *R,* ставящий в соответствие основной функции $\varphi(x)$ вещественное число $(\psi,\varphi)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\varphi(x)dx$ [6]. Обобщенная функция $\psi(x)$ регулярна в некоторой области *G*, если в этой области она совпадает с некоторой локально интегрируемой функцией, в противном случае $\psi(x)$ — сингулярна. Обобщенные функции включают и обычные функции, имеющие интегрируемые особенности. Множество обобщенных функций на основном пространстве *K* обозначается K'.

Приведем понятие регуляризации расходящихся интегралов [6]. Пусть $\psi(x)$ — функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки x_0. Регуляризация интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\varphi(x)dx$ или функции $\psi(x)$ — это построение функционала $\psi(x) \in K'$, который на основные функции $\varphi(x)$, такие, что $\varphi(x_0)=0$, действует по формуле $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\varphi(x)dx$. Регуляризация производится по следующим правилам:

— пусть $\psi(x)=1/x$, тогда для любых вещественных чисел $\tilde{a}>0, \tilde{b}>0$ имеет место формула

$$(\psi,\varphi)=\int_{-\infty}^{-\tilde{a}}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{b}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx+\int_{\tilde{b}}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx;$$

— если при некотором целом $m>0$ функция $\psi(x)x^m$ локально интегрируема, то $\psi(x)$ допускает регуляризацию в виде

$$(\psi,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\left\{\varphi(x)-\left[\varphi(0)+\frac{d\varphi(0)}{dx}x+\ldots+\frac{d^m\varphi(0)}{dx^m}\frac{x^m}{m!}\right]\theta(1-x)\right\}dx\ ,$$

где $\theta(1-x)=\begin{cases}1, & x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Обобщенные функции x_+^λ, x_-^λ, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, $\lambda \in R$ определяются следующим образом: $x_+^\lambda = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ x^\lambda, x > 0, \end{cases}$ и $x_-^\lambda = \begin{cases} 0, x > 0, \\ |x|^\lambda, x \le 0. \end{cases}$ Формулы для их регуляризации, а также регуляризации функции x^{-n}, $n \in Z$, где Z — пространство целых чисел, известны [6].

Рассмотрим следующий частный случай регуляризации. Пусть $f(x)$ — некоторая обычная функция, принадлежащая пространству $L_2(R)$ функций, интегрируемых с квадратом на R, $\psi(x) \in K'$. Если $f(x)$ имеет компактный носитель $\mathrm{supp} f \subset [-C_1, C_1]$, $C_1 > 0$, а произведение $f(x)\psi(x) = g(x)$ понимается в смысле обычных функций, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)dx = (g(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx, \tag{3}$$

где интеграл понимается как регуляризованный, а $\varphi(x) \in K$ — основная бесконечно-дифференцируемая функция, такая, что $\varphi(x) = 1$ при $x \in [-C_1, C_1]$.

Определим непрерывное преобразование с обобщенными вейвлет-функциями. Пусть $f(x) \in L_2(R), \psi(x) \in K'$. Преобразованием подобия и сдвига сгенерируем так, как это делается в вейвлет-анализе, двупараметрическое семейство функций

$$\psi^{ab}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \tag{4}$$

где a — масштаб,
b — параметр сдвига,
$a, b \in R, a \neq 0$.

Функцию (4), где $\psi(x)$ — обобщенная функция, назовем обобщенной вейвлет-функцией. Непрерывное преобразование с обобщенными вейвлет-функциями определим выражением

$$(T^{wav} f)(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx, \tag{5}$$

$$(T^{wav} f)(m,\ n) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(a_0^{-m}x - nb_0)dx, \tag{6}$$

где (5) и (6) следует понимать в смысле (3).

Формула (6) получена из (5) дискретизацией a, b по формулам $a = a_0^m$, $b = nb_0 a_0^m$, $m, n \in Z$ [6], где вещественные числа $a_0 > 1, b_0 > 0$ фиксированы [7]. Под $\psi(x)$ будем понимать обобщенную функцию из класса функций со степенными особенностями, представимую в виде суммы

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) q_i(x), \tag{7}$$

где $p_i(x) \in K$ — некоторые фиксированные функции;
$q_i(x)$ — одна из функций: x_+^λ, x_-^λ, x^{-n}, причем $\lambda \neq -1, -2, \ldots$

Операции сложения функций вида (7), умножения (7) на функцию из K и дифференцирования (7) проводятся в пределах класса функций со степенными особенностями. Регуляризацией функций x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} будем считать определенные обобщенные функции [6], а регуляризацией бесконечно дифференцируемой функции считаем соответствующий регулярный функционал, т.к. $|x|^0 = 1$. Регуляризация функции $\psi(x)$ определяется в этом случае формулой (7). При увеличении или уменьшении величины a преобразование Фурье $\hat{\psi}^{a,0}(\omega)$ функции $\psi^{a,0}(x) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x}{a}\right)$ покрывает различные частотные интервалы при условии локализации $\hat{\psi}(\omega)$ по частоте. Большие значения $|a|$ соответствуют низким частотам, малые значения $|a|$ соответствуют высоким частотам. Изменение параметра b ведет к сдвигу центра локализации $\psi^{a,b}(x)$ в точку $x = b$. Примером обобщенной вейвлет-функции является ядро преобразования Гильберта $\psi^{1,b}(x) = \frac{1}{x-b}$.

Определим обратное преобразование с обобщенными вейвлет-функциями

$$f(x) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (T^{wav} f)(a,b)\psi^{ab}(x)\frac{dadb}{a^2}, \tag{8}$$

которое имеет смысл, если $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(T^{wav} f\right)(a,b)\psi^{ab}(x)\frac{dadb}{a^2}$ сходится к $f(x) \in L_2(R)$ в слабом смысле, а C_ψ — некоторая константа. Сходимость (8) в слабом смысле определяется соотношением идентичности

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (T^{wav} f)(a,b)\overline{(T^{wav} g)(a,b)}\frac{dadb}{a^2} = C_\psi(f,g), \tag{9}$$

где $C_\psi = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|}d\omega$;

$\hat{\psi}(\omega)$ — преобразование Фурье обобщенной функции $\psi(x)$;

$g(x) \in K$.

Если $C_\psi = \infty$, то соотношение идентичности (9) не выполняется, если $C_\psi = 0$, выражение (8) не сходится в слабом смысле.

Пусть $\psi(x) = |x|^\lambda \operatorname{sgn}(x)$. Тогда [6]

$$C_\psi = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|}d\omega = 2\pi C\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^{-1}|\omega|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}(\omega)d\omega = 2\pi C\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^{-\lambda-2}\operatorname{sgn}(\omega)d\omega = 0,$$

где $C = \begin{cases} 2i\cos\frac{\pi\lambda}{2}\Gamma(\lambda+1), \lambda \neq -2, -4, ... \\ \frac{i^{-\lambda}\pi}{(-\lambda-1)!}, \lambda = -2, -4, ... \end{cases}$ — константа;

Γ — гамма-функция,

(8) не сходится в слабом смысле. Исключением является преобразование Гильберта $(Hf)(a_0,b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_0 f(x)}{x-b}dx$, которое удовлетворяет соотношению идентичности на одном масштабе. А именно, для любого фиксированного $a_0 \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(Hf)(a_0,b)(Hg)(a_0,b)\frac{db}{a_0^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}|\hat{\psi}(a_0\omega)|^2 d\omega,$$

где $\psi(x) = 1/x$ — в случае преобразования Гильберта;

$$\left|\hat{\psi}(a_0\omega)\right|^2 = \left|-i\,\mathrm{sgn}(a_0\omega)\right|^2 = \begin{cases}1, \omega \neq 0,\\ 0, \omega = 0.\end{cases}$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(Hf)(a_0,b)(Hg)(a_0,b)\dfrac{db}{a_0^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega = (f,g)$, а $C_\psi = 1$.

Чтобы непрерывное преобразование с обобщенными вейвлет-функциями сходилось к $f(x)$, т. е. чтобы константа C_ψ была конечна и отлична от нуля, будем использовать разные обобщенные вейвлет-функции для прямого и обратного преобразования.

Известно [7], что если $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\psi}_1(\omega)\right|\left|\hat{\psi}_2(\omega)\right|\left|\omega\right|^{-1}d\omega < \infty$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(T_{\psi_1}^{wav}f)(a,b)(\psi_2^{ab},g)db\frac{da}{a^2} = C_{\psi_1\psi_2}(f,g), \tag{10}$$

где $C_{\psi_1\psi_2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\psi}_1(\omega)\right|\left|\hat{\psi}_2(\omega)\right|\left|\omega\right|^{-1}d\omega$;

$(T_{\psi_1}^{wav}f)(a,b)$ — преобразование с обобщенными вейвлет-функциями $\psi_1^{a,b}(x)$.

Если $C_{\psi_1\psi_2} \neq 0$, то

$$f(x) = C_{\psi_1\psi_2}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(T_{\psi_1}^{wav}f)(a,b)\psi_2^{ab}(x)db\frac{da}{a^2}. \tag{11}$$

Таким образом, разные для прямого и обратного преобразования функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ нужно выбирать из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\psi}_1(\omega)\right|\left|\hat{\psi}_2(\omega)\right|\left|\omega\right|^{-1}d\omega \neq 0$, где интеграл понимается в регуляризованном смысле. Тогда интеграл в выражении (11) сходится в слабом смысле к $f(x)$, т.е. для любого $g(x) \in K$ справедливо выражение (10).

Оценим локальную регулярность функции с помощью теорем, характеризующих поведение коэффициентов преобразования с обобщенными вейвлет-функциями при изменении его масштаба. Так, если $f(x)$ имеет показатель Гельдера α, $0 < \alpha \leq 1$, а вейвлет-функция $\psi^{a,b}(x)$ ограничена и $\left|(T^{wav}f)(a,b)\right| \leq C\left|a\right|^{\alpha}$, то значения вейвлет-коэффициентов функции $f(x)$ при $a \to \infty$ растут как степенная функция, если $\alpha < 0$, то значения вейвлет-коэффициентов функции $f(x)$ при $a \to \infty$ убывают как гипербола [3].

Известно использование аппарата обобщенных функций в качестве анализирующего вейвлета при характеристике локальной регулярности функции [3, 4]. Однако, чаще вейвлеты использовались в качестве основных функций под знаком интеграла с анализируемой обобщенной функцией $f(x)$. Предполагалось, что вейвлет имеет компактный носитель и показатель регулярности не менее, чем $[m]+1$, $m \in Z, m > 0$, если $f(x)x^m$ — локально интегрируема. В этом случае размер окрестности точки сингулярности, которая используется при регуляризации интеграла (11), фактически зависит от расстояния между экстремумами вейвлета $\psi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$, определяемого масштабом a.

Предполагается, что анализируемая функция $f(x) \in L_2(R)$ как функция зависимости значений интенсивности изображения от пространственной координаты; вейвлет является обобщенной функцией $\psi(x)\in K'$, а интеграл (11) понимается в смысле равенства (3). Тогда размер окрестности точки сингулярности, которая используется при регуляризации интеграла (5), остается фиксированным при изменении масштаба *a*.

Для оценки локальной регулярности функции с помощью коэффициентов преобразования с обобщенными вейвлет-функциями предлагаются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть для любого $0<c<\infty$ $\int_{-c}^{c}\psi(x)dx=0,$ $|\psi(x)|\le C_2|x|^{\lambda}$, где c, C_2 — некоторые константы. Если финитная ограниченная функция $f(x)$ однородно регулярна на своем носителе с показателем Гельдера α, $0<\alpha\le 1$, то

$$\left|(T^{wav}f)(a,b)\right|\le C'|a|^{\alpha+1/2}|aC_1+b|^{\alpha+\lambda+1},$$

где C_1, C' — некоторые константы.

Доказательство. Если $f(x)$ — финитна, то существует константа $C_1>0$ такая, что supp$f\subset[-C_1,C_1]$. Так как для любого $0<c<\infty$ $\int_{-c}^{c}\psi(x)dx=0$, где интеграл понимается в регуляризованном смысле, имеем

$$\left|(T^{wav}f)(a,b)\right|\le\left|\int_{-C_1}^{C_1}|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)[f(x)-f(b)]dx\right|\le\int_{-C_1}^{C_1}|a|^{-1/2}\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|C|x-b|^{\alpha}dx\le$$

$$\le C|a|^{\alpha+1/2}\int_{-aC_1-b}^{aC_1+b}|\psi(y)||y|^{\alpha}dy.$$

Так как из условия теоремы $|\psi(x)|\le C_2|x|^{\lambda}$, то

$$\left|(T^{wav}f)(a,b)\right|\le C|a|^{\alpha+1/2}\int_{-aC_1-b}^{aC_1+b}|y|^{\alpha+\lambda}dy=C_3|a|^{\alpha+1/2}\frac{|aC_1+b|^{\alpha+\lambda+1}}{\alpha+\lambda+1}=C'|a|^{\alpha+1/2}|aC_1+b|^{\alpha+\lambda+1},$$

где C, C_3 — некоторые константы.Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть для любого $0<c<\infty$ $\int_{-c}^{c}\psi(x)dx=0,$ $|\psi(x)|\le C_2|x|^{\lambda}$, где c, C_2 — некоторые константы. Если финитная ограниченная функция $f(x)$ с носителем supp$f\subset[-C_1,C_1]$, $C_1>0$, имеет в точке x_0 показатель Гельдера α, $0<\alpha<1$, то

$$\left|(T^{wav}f)(a,x_0+b)\right|\le C'|a|^{\alpha+1/2}|aC_1+b|^{\alpha+\lambda+1}+C''|a|^{1/2}|b|^{\alpha}|aC_1+b|^{\lambda+1},$$

где C_1, C', C'' — некоторые константы.

Доказательство. Предположим без ограничения общности $x_0=0$. Так как для любого $0<c<\infty$ $\int_{-c}^{c}\psi(x)dx=0,$ имеем

$$\left|(T^{wav}f)(a,x_0+b)\right|\le\left|\int_{-C_1}^{C_1}|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)[f(x)-f(0)]dx\right|\le\left|\int_{-C_1}^{C_1}|a|^{-1/2}\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right||f(x)-f(0)|dx\right|\le$$

$$\le\int_{-C_1}^{C_1}|a|^{-1/2}\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|C|x|^{\alpha}dx\le C|a|^{\alpha+1/2}\int_{-aC_1-b}^{aC_1+b}|\psi(y)|\left|y+\frac{b}{a}\right|^{\alpha}dy.$$

Так как $|\psi(x)| \le C_2 |x|^{\lambda}$, то

$$\left|(T^{wav} f)(a, x_0 + b)\right| \le C_3 |a|^{\alpha+1/2} \left(\int\limits_{-aC_1-b}^{aC_1+b} |y|^{\alpha+\lambda} dy + \int\limits_{-aC_1-b}^{aC_1+b} |y|^{\lambda} \left|\frac{b}{a}\right|^{\alpha} dy \right) \le$$

$$\le C' |a|^{\alpha+1/2} |aC_1 + b|^{\alpha+\lambda+1} + C'' |a|^{\alpha+1/2} |a|^{-\alpha} |b|^{\alpha} |aC_1 + b|^{\lambda+1} =$$

$$= C' |a|^{\alpha+1/2} |aC_1 + b|^{\alpha+\lambda+1} + C'' |a|^{1/2} |b|^{\alpha} |aC_1 + b|^{\lambda+1},$$

где C', C'', C_3 — некоторые константы. Теорема доказана.

Таким образом, определено понятие обобщенной вейвлет-функции и доказаны теоремы, которые позволяют оценить локальную регулярность функции с помощью коэффициентов преобразования с обобщенными вейвлет-функциями. Использование обобщенных вейвлет-функций обеспечивает более точную локализацию контуров изображения по сравнению с обычными вейвлетами, на основе чего может быть разработан метод контурной сегментации изображений с помощью преобразования с обобщенными вейвлет-функциями.

Литература

1. Jaffard S. Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions / Jaffard S., Meyer Y. // Mem. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 123, № 587. — P. 1 — 109.
2. Holschneider M. Regularite locate de la fonction non-differentiable de Rieman / Holschneider M., Tchamitchian P. // Les ondelettes en 1989 / Edit. by Lemarie P.G. — New York: Springer-Verlag, 1989. — P. 134 — 176.
3. Mallat S. Singularity detection and processing with wavelets / Mallat S., Hwang W.L. // IEEE Trans. Info Theory. — 1992. — Vol. 38, № 2. — P. 617 — 642.
4. Tchamitchian P. Wavelets: functions and operators // Wavelets: Theory and Applications / Edit. by Erlebacher. G. — Oxford: University Press, 1996. — P. 63 — 124.
5. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с.
6. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. — М.: Физматгиз, 1959. — 470 с.
7. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. — New York: Academic Press, 1992. — 353 p.

Поступила в редакцию 24 мая 2005 г.