УДК 621.372

Ю.Д. Иванов, канд. техн. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т,
О.С. Захарова, инженер, Одес. нац. мор. акад.

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ИНФИМУМНЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.Д. Іванов, О.С. Захарова. **Алгоритм синтезу інфімумних диз'юнктивних нормальних форм логічних функцій.** Розглянуто алгоритм синтезу інфімумних диз'юнктивних нормальних форм логічних функцій від n змінних. Розглянуто приклад синтезу функції $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ у термінах куба E^4.

Yu.D. Ivanov, O.S. Zakharova. **Be Synthesis algorithm infimum of disjunctive normal forms logic functions.** The algorithm of synthesizing infimum of disjunctive normal forms of logic functions from *n* variables is realized. The example of synthesizing of the function $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ in terms of a cube E^4 is considered.

Разработка совершенных алгоритмов минимизации булевых функций непосредственно связана с реализацией логических электронных устройств (ЛЭУ) с совершенными свойствами, т.е. с минимально возможным числом элементов *k* и наименьшим числом входов *m* [1, 2].

Существующие алгоритмы минимизации булевых функций, основанные на интегральной оценке числа букв переменных и числа элементарных конъюнкций дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), не обеспечивают гарантированного получения предельных характеристик ЛЭУ одноэтапно, поскольку все упрощения, сводимые к вычеркиванию букв в членах ДНФ и вычеркиванию членов ДНФ, локальны, т.к. упрощается только какой-либо один член ДНФ, и приводят сначала к тупиковым ДНФ − локальным экстремумам — и лишь затем, среди множества тупиковых ДНФ определяются минимальные ДНФ (МДНФ) — глобальные экстремумы [3, 4].

Предлагается обобщенный алгоритм синтеза ИДНФ булевых функций от *n* переменных, позволяющий определить точную нижнюю границу значений коэффициента $C_{\inf}$ сложности ЛЭУ и обеспечивающий построение ЛЭУ с совершенными свойствами минимально возможным числом элементов $k_{\inf}$ и входов $m_{\inf}$ [5].

Реализация алгоритма осуществляется последовательно, таким образом.

Первый шаг заключается в развитии вершин в ребре покрывающих интервалов для любой выбранной вершины, т.е. организации кубов E^1 как совокупности двух вершин $((\alpha_{n-1}(k)...\alpha_i(k)...\alpha_0(k)),(\alpha_{n-1}(k)...\overline{\alpha_i(k)}...\alpha_0(k)))\in N_f$:

— для заданного числа *n* переменных функции $f(x_0,x_1,...,x_{n-1})$ определяются все *n*-разрядные двоичные комбинации номеров вершин куба E^n от $000...0$ до $111...1$;

— для любой функции определяются вершины подмножества $N_f \subseteq E^n$, для которых $f(x_0,x_1,...,x_{n-1})=1$, в виде *n*-разрядных двоичных номеров вершин

$$\alpha_{n-1}(0)...\alpha_i(0)...\alpha_0(0),...,\alpha_{n-1}(k)...\alpha_i(k)...\alpha_0(k),...,\alpha_{n-1}(2^n-1)...\alpha_i(2^n-1)...\alpha_0(2^n-1), \quad (1)$$

где $\alpha_i \in\{0,1\}$, $i=0,...,n-1$,

$k=0,....,2^n-1$ — десятичный номер вершины куба E^n;

— для каждой вершины $\alpha_{n-1}(k)...\alpha_i(k)...\alpha_0(k) \in N_f$, начиная с $k=0$, определяются геометрические соседи в виде $\alpha_{n-1}(k)...\overline{\alpha_i(k)}...\alpha_0(k) \in N_f$ по всем, начиная с $i=0$;

— все вершины, участвующие в рассмотрении, выбираются из подмножества $N_f \subseteq E^n$.

На втором шаге осуществляется организация покрывающих кубов E^2 на основе полученных кубов E^1 как совокупности двух пар вершин, геометрических соседей, в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k), \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k), \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{i1}(k)}\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k), \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{i1}(k)}\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k). \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Здесь геометрическое соседство кубов E^1 определяется по всем $i_1 1=0,...,n-1$, причем $i_1 \neq i$, начиная с $i_1=0$.

На третьем шаге:

— организуются покрывающие кубы E^3 на основе полученных кубов E^2:

$$\left.\begin{matrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{i2}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k), \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{i2}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k), \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{i2}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k), \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{i2}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k), \end{pmatrix}\right) \\ \left(\begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{i2}(k)}\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k), \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{i2}(k)}\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k), \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{i2}(k)}\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k), \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{i2}(k)}\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k), \end{pmatrix}\right) \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

здесь геометрическое соседство кубов E^2 определяется по всем $i_2=0,...,n-1$, причем $i_2 \neq i_1, i$, начиная с $i_2=0$;

— развитие покрывающих интервалов данной вершины, т.е. кубов $E^c \subseteq E^n$ $(c \leq n)$, будет продолжаться до тех пор, пока соблюдается условие развития покрывающих интервалов, т.е. все вершины $\alpha_{n-1}(k)...\alpha_0(k) \in N_f$ в интервале по всем $k=0,...,2^2-1$.

В результате будет получен максимальный покрывающий интервал для выбранной вершины:

$$\begin{matrix} \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{ij}(k)\ ...\ \alpha_{i2}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k) \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \alpha_{ij}(k)\ ...\ \alpha_{i2}(k)\ ...\ \alpha_{i1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k) \\ ....\quad ....\quad ....\quad ....\quad ....\quad .... \quad . \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{ij}(k)}\ ...\ \overline{\alpha_{i2}(k)}\ ...\ \overline{\alpha_{i1}(k)}\ ...\ \alpha_i(k)\ ...\ \alpha_0(k) \\ \alpha_{n-1}(k)\ ...\ \overline{\alpha_{ij}(k)}\ ...\ \overline{\alpha_{i2}(k)}\ ...\ \overline{\alpha_{i1}(k)}\ ...\ \overline{\alpha_i(k)}\ ...\ \alpha_0(k) \end{matrix} \qquad (4)$$

Геометрическое соседство кубов E^{c-1} определяется по всем $i_j=0,...,n-1$, начиная с $i_j=0$, причем $i_j \neq i(i-1),...,i_2,i_1,i$.

Для вершины, представленной десятичным номером k, геометрические соседи определяются по всем возможным соответствующим x_i, $i = 0, ..., n-1$ следующим образом:

$$\begin{cases} k_i = k + 2^i, \text{ если } (k + 2^i) < 2^2, \\ k_i = k - 2^i, \text{ если } (k + 2^i) \geq 2^2, \end{cases} \tag{5}$$

поскольку суммирование осуществляется по $\mod 2^k$.

В качестве максимального покрытия вершины k принимается интервал $N^{r_{j\min}}_{E^{n-r_{j\min}}}$ (4), для которого не выполняется условие развития

$$\alpha_{n-1}(k)...\alpha_0(k) \in N_f, \tag{6}$$

где $k = 0, ..., 2^n - 1$.

Проверка условия (6) осуществляется на каждом шаге развития покрывающих интервалов заданной вершины для всех вершин, объединяемых в интервал.

Определенные таким образом максимальные покрытия всех вершин из подмножества N_f анализируются для нахождения эквивалентных интервалов, покрывающих одни и те же вершины.

В результате приведения эквивалентных интервалов остается только один из каждой группы эквивалентности, для чего сначала на шаге 1 приводятся максимальные интервалы, соответствущие 1-мерным кубам E^1 с рангом $r_{j\min} = n-1$. Число вершин таких кубов $2^1 = 2$. На шаге 2 приводятся максимальные интервалы, соответствующие 2-мерным кубам E^2 с числом вершин $2^2 = 4$. И, наконец, приводятся максимальные интервалы, соответствующие *p*-мерным кубам E^p $\left(p < n\right)$, с числом вершин 2^p, если таковые имеются в наличии.

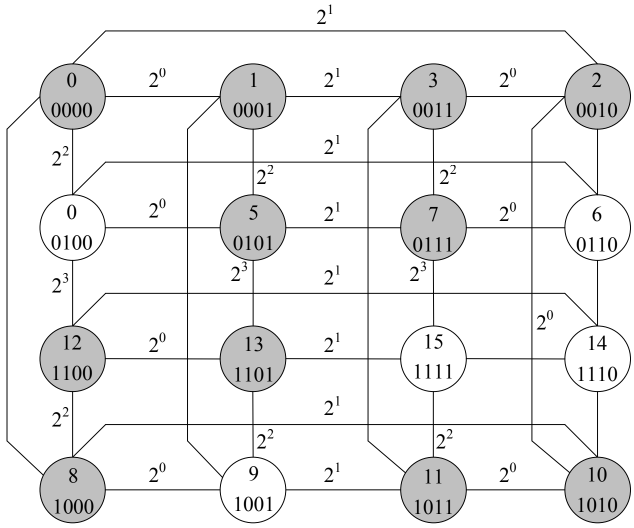
В результате приведения эквивалентных интервалов определяется совокупность независимых, частично зависимых и зависимых интервалов $(N^{r_{j\min}}_{E^{n-r_{j\min}}})^*$. Для выявления зависимых интервалов, подлежащих удалению из совокупности максимальных покрывающих интервалов вершин N_f, определяются независимые и частично зависимые интервалы. Максимальный интервал $N^{r_{j\min}}_{E^{n-r_{j\min}}}$ $\left(i = 1, ..., m\right)$ называется независимым или частично зависимым, если имеет хотя бы одну вершину, не покрытую интервалами $N^{r_{\zeta\min}}_{E^{n-r_{\zeta\min}}}$, такого же или меньшего ранга $r_{\zeta\min} \leq r_{j\min}$ $(\zeta = 1, ..., m, \zeta \neq j)$. При отсутствии такой, не покрытой другими интервалами вершины, данный интервал является зависимым. Часть вершин, покрытых зависимыми интервалами, может быть не покрыта независимыми или частично зависимыми интервалами максимального покрытия вершин N_f. Поэтому сначала осуществляется попытка выявить один зависимый интервал, покрывающий все вершины, не покрытые независимыми или частично зависимыми интервалами. В случае отсутствия такого интервала производится попытка определения покрывающей вершины и т.д. При наличии нескольких вариантов размещения непокрытых вершин в зависимых интервалах выбирается интервал с минимальным суммарным рангом

$$r^*_{\min\Sigma} \leq r^*_{\min\Sigma k} \leq ... \leq r^*_{\min\Sigma 1}, \tag{7}$$

где $r^*_{\min\Sigma}$, $r^*_{\min\Sigma k}$, $r^*_{\min\Sigma 1}$ — суммарные ранги зависимых интервалов различных вариантов размещения непокрытых вершин.

Определенные таким образом зависимые интервалы $(N^{r_{j\min}}_{E^{n-r_{j\min}}})^*_{\Pi}$ после удаления из совокупности максимальных покрывающих интервалов вершин N_f всех остальных зависимых интервалов являются независимыми либо частично зависимыми.

Для представления полученного покрытия $N(f)_{\max\,\text{опт}}$ в виде ИДНФ каждому из объединенных максимальных покрытий сопоставляется соответствующая элементарная конъюнкция переменных. С этой целью выписываются двоичные эквиваленты вершин, входящих в каждое максимальное покрытие. Дизъюнкция всех полученных конъюнкций дает искомую ИДНФ $f_{\text{ИДНФ}}(x_0, ..., x_{n-1})$.



СМР куба E^4

Рассмотрим синтез ИДНФ функции $f_{\text{ИДНФ}}(x_0, x_1, x_2, x_3)$. В совершенной матричной расстановке (СМР) соответствующего 4-мерного куба E^4 (рис. 1) подмножество $N_f \in E^4$ вершин СМР куба E^4 функции, для которых $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 1$, выделено зачеркиванием. Для каждой вершины подмножества N_f в соответствии с СМР по переменным x_0, x_1, x_2, x_3 определяем геометрических соседей, образующих с этими вершинами ребра, т.е. кубы E^1 (см. рисунок).

Последовательность рассматриваемых вершин $N^n_{E^0}$ на шаге развития их в ребра $N^{n-1}_{E^1}$, т.е. развития куба E^0 в куб E^1 $(E^0 - E^1)$, может быть произвольной, но согласованной в СМР.

Для участия в дальнейших этапах развития покрывающих интервалов остаются полученные после приведения эквивалентных покрытий ребра E^1: (0−1), (0−2), (0−8), (1−3), (1−5), (3−2), (3−7), (3−11), (2−10), (5−7), (5−13), (12−8), (12−13), (8−10), (11−10).

На втором шаге алгоритма осуществляется развитие полученных ребер (кубов E^1) в покрывающие грани (кубы E^2) по всем возможным переменным в пределах вершин множества N_f. После приведения эквивалетных покрывающих интервалов $N^{n-2}_{E^2}$, т.е. граней E^2 куба E^n, остаются только интервалы, которые покрывают различные подмножества вершин множества $N_f : (0-1)-(3-2), (0-2)-(10-8), (1-3)-(7-5), \big(3-2\big)-\big(10-11\big)$. На этом шаге развитие покрывающих интервалов заканчивается.

На третьем шаге алгоритма предполагается развитие оставшихся граней кубов E^2 в кубы E^3. Ни одна из этих граней не может быть развита в кубы E^3, поэтому процесс развития покрывающих интервалов в пределах множества вершин N_f функции f заканчивается.

Таким образом, для обеспечения максимального покрытия всех вершин N_f необходимо объединить максимальные покрывающие интервалы, определенные на каждом из этапов развития. На первом и втором шагах максимальными покрытиями в силу отсутствия возможности их дальнейшего развития являются (5−13), (12−8), (12−13), (0−1) – (3−2), (0−2) – (10−8), (1−3) – (7−5), (3−2) – (10−11).

Зависимыми являются интервалы (5−13), (12−8), (12−13), (0−1) - (3−2). Оптимальным вариантом поглощения этих интервалов является такой, при котором суммарный ранг оставшихся независимых и частично зависимых максимальных интервалов $r_{\min\Sigma}$ будет минимальным.

При первом варианте поглощения суммарный ранг оставшихся покрытий $(5-13), (12-8), (0-2)-(10-8), (1-3)-(7-5), (3-2)-(10-11)$, определяемый общим количеством переменных, не меняющих свое значение в пределах каждого покрытия, будет равен $r_{\min\Sigma 1} = 3+3+2+2+2 = 12$, поскольку для покрытия $(5-13)$ имеем $0101 \oplus 1101 = x_2 \overline{x_1} x_0$, для

$(12-8)-1100\oplus1000=x_3\overline{x}_1\overline{x}_0$, для $(1-3)-(7-5)-0001\oplus0011\oplus0111\oplus0101=\overline{x}_3x_0$, для $(0-2)-(10-8)-0000\oplus0010\oplus1010\oplus1000=\overline{x}_2\overline{x}_0$, для $(3–2)–(10–11)-0011\oplus0010\oplus1010\oplus1011=\overline{x}_2x_1$.

Шаги развития покрывающих интервалов

Вершины, E^0	Ребра, E^1	Грани, E^2	Кубы, E^3
0	$(0-1)$	$(0-1)-(3-2)$	-
	$(0-2)$	$(0-2)-(3-1)^*$, $(0-2)-(10-8)$	-
	$(0-8)$	$(0-8)-(10-2)^*$	-
1	$(1-0)^*$	-	-
	$(1-3)$	$(1-3)-(2-0)^*$, $(1-3)-(7-5)$	-
	$(1-5)$	$(1-5)-(7-3)^*$	-
3	$(3-1)^*$	-	-
	$(3-2)$	$(3-2)-(0-1)^*$, $(3-2)-(7-5)$	-
	$(3-7)$	$(3-7)-(5-1)^*$	-
	$(3-11)$	$(3-11)-(10-2)^*$	-
2	$(2-3)^*$	-	-
	$(2-0)^*$	-	-
	$(2-10)$	$(2-10)-(11-3)^*$, $(2-10)-(8-0)^*$	-
5	$(5-1)^*$	-	-
	$(5-7)$	$(5-7)-(3-1)^*$	-
	$(5-13)$	-	-
7	$(7-13)^*$	-	-
	$(7-5)^*$	-	-
12	$(12-8)$	-	-
	$(12-13)$	-	-
13	$(13-5)^*$	-	-
	$(13-12)^*$	-	-
8	$(8-0)^*$	-	-
	$(8-12)^*$	-	-
	$(8-10)$	$(8-10)-(2-0)^*$	-
11	$(11-3)^*$	-	-
	$(11-10)$	$(11-10)-(2-3)^*$	-
10	$(10-8)^*$	-	-
	$(10-11)^*$	-	-
	$(10-2)$	-	-

При втором варианте поглощения суммарный ранг покрытий (12−13), (0−2)–(10−8), (1−3)–(7−5), (3−2)–(10−11) равен $r_{\min\Sigma} = 3+2+2+2 = 9$. Оптимальным является второй вариант покрытия, поскольку $r_{\min\Sigma 2} < r_{\min\Sigma 1}$. Итак, оптимальное максимальное покрытие вершин

$$N(f)_{\max\text{опт}} = (12-13) \cup ((0-2)-(10-8)) \cup ((1-3)-(7-5)) \cup ((3-2)-(10-11)).$$

Для представления полученного покрытия $N(f)_{\max\text{опт}}$ в виде инфимумной дизъюнктивной нормальной формы сопоставим каждому из объединенных максимальных покрытий соответствующие элементарые конъюнкции переменных. С этой целью выписываем двоичные эквиваленты вершин, входящие в каждое покрытие:

$x_3\,x_2\,x_1\,x_0$	$x_3\,x_2\,x_1\,x_0$	$x_3\,x_2\,x_1\,x_0$	$x_3\,x_2\,x_1\,x_0$
1 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 1 1
1 1 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1	0 0 1 0
	1 0 1 0	0 1 1 1	1 0 1 0
	1 0 0 0	0 1 0 1	1 0 1 1
$x_3\,x_2\,\bar{x}_1$	$\bar{x}_2 \quad \bar{x}_0$	$\bar{x}_3 \quad x_0$	$\bar{x}_2\,x_1$

Дизъюнкция всех полученных конъюнкций дает искомую

$$f_{\text{ИДНФ}}\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) = x_3 x_2 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 . \quad (8)$$

Шаги развития покрывающих интервалов приведены (см. таблицу).

Таким образом, полученное в соответствии с алгоритмом выражение (8) представляет собой ИДНФ заданной функции и может служить для реализации логического электронного устройства, обладающего совершенной структурой с инфимумным числом элементов $K_{\inf} = 4$ и инфимумным числом входов $m_{\inf} = 9$, т.е. минимальным коэффициентом сложности $C_{\inf} = 4 \cdot 9 = 36$ из возможных реализаций.

Предложенный обобщенный алгоритм синтеза ИДНФ реализует все основные положения инфимумного метода построения совершенных ЛЭУ как на программном, так и на аппаратном уровнях.

Литература

1. Иванов Ю.Д. Обобщенный метод синтеза минимальных ДНФ // Тр. второй междунар. науч.-практ. конф. “Современ. информ. и электрон. технологии”, Одесса, 28—31 мая 2001 г. — Одесса, 2001. — С. 56.
2. Иванов Ю.Д. Метод естественного кодирования логических функций / Иванов Ю.Д., Захарова О.С. // Тр. четвертой междунар. науч.-практ. конф. “Современ. информ. и электрон. технологии”, Одесса, 19—23 мая 2003 г. — Одесса, 2003. — С. 120.
3. Васильев Ю.Л. Дискретная математика и мате-матические вопросы кибернетики / Васильев Ю.Л., Ветухновский Ф.Я.; Под общ. ред. Яблонского С.В. и Лупанова О.Б. — М.: Наука, 1974. — 240 с.
4. Чернышев Ю.О. Методы оптимизации комбинированных устройств. — М.: Сов. Радио, 1977. — 160 с.
5. Иванов Ю.Д. Метод синтеза инфимумных дизъюнктивных нормальных форм логических функций // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2006 — Вып. 1(25). — С. 178 — 183.

Поступила в редакцию 15 декабря 2005 г.