

УДК 621.313.282

**М.И. Ярославцев**, канд. техн. наук, Черкасский ин-т пожарной безопасности им. Героев Чернобыля

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ИНДУКТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

*М.І. Ярославцев. Математична модель лінійного індукторного двигуна з електромагнітним збудженням.* Отримано математичну модель лінійного індукторного двигуна з електромагнітним збудженням, яка відображає залежність створеного тягового зусилля від основних параметрів двигуна.

*M.I. Yaroslavtsev. Mathematical model of linear inductor motor with electromagnetic excitation.* The mathematical model of a linear inductor motor with electromagnetic excitation, which displays the dependence of the created traction upon the basis parameters of the motor, is obtained.

В приводах современных устройств позиционирования широко используются линейные индукторные двигатели (ЛИД) с возбуждением от постоянных магнитов, которые обычно применяются в приводах с шаговым управлением [1]. Благодаря простоте и надежности применение этих двигателей является перспективным также и при создании линейных электроприводов с регулируемым тяговым усилием [2].

Получена математическая модель ЛИД с возбуждением от постоянных магнитов, которая может быть использована для расчета тяговых усилий, создаваемых конкретными образцами двигателей с частотно-токовым управлением [3].

Внимание разработчиков прецизионного технологического оборудования начинают привлекать также и ЛИД с электромагнитным возбуждением, в которых магнитный поток возбуждения создается либо с помощью постоянной составляющей токов управления [4], либо с помощью отдельных обмоток возбуждения [5].

ЛИД с электромагнитным возбуждением, по сравнению с двигателями, использующими для возбуждения постоянные магниты, обладают большими габаритными размерами и характеризуются худшими энергетическими показателями. Однако они имеют преимущество, связанное с возможностью управления, создаваемым тяговым усилием по двум независимым каналам: цепи управления и цепи возбуждения. Благодаря этому представляется возможным, в частности, улучшить тяговые характеристики ЛИД в приводах с частотно-токовым управлением путем соответствующего корректирующего воздействия на ток возбуждения.

К сожалению, несмотря на близость схем ЛИД с возбуждением от постоянных магнитов и с электромагнитным возбуждением, полученная математическая модель [3] не может быть использована для расчета тяговых усилий двигателей с электромагнитным возбуждением. Это следует из того, что в первом случае для возбуждения двигателей применяется источник магнитного потока, а во втором случае — источник магнитодвижущей силы (МДС) возбуждения.

Поэтому представляется необходимым получение математической модели ЛИД с электромагнитным возбуждением, которая должна отображать зависимость создаваемого двигателем тягового усилия от основных его параметров и управляющих воздействий.

Поставленная задача решается на основе энергетического баланса в двигателе. На рис. 1 представлена схема ЛИД с электромагнитным возбуждением [5], где 1, 2, 3, 4 — обмотки управления двигателем, расположенные на полюсах индуктора двигателя; 5 — объединенная катушка возбуждения двигателя,  $\tau$  — зубцовое деление двигателя;  $x$  — текущее положение индуктора двигателя вдоль направления перемещения. Конструктивно катушка возбуждения выполнена в виде двух обмоток, охватывающих попарно полюсы индуктора. Неподвижным элементом двигателя является пассивная ферромагнитная плита (рейка).

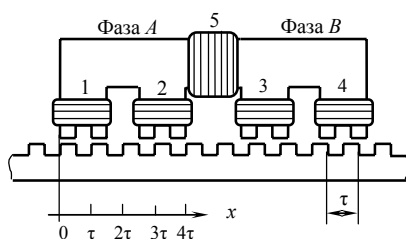


Рис. 1. Схема ЛИД с электромагнитным возбуждением

Полагаем, что в магнитопроводах индуктора и рейки двигателя отсутствуют потери на гистерезис и вихревые токи.

Электрическая энергия, потребляемая двигателем от внешних источников, расходуется на совершение механической работы, затрачивается на нагрев проводов обмоток управления и катушки возбуждения двигателя, а также преобразуется в энергию магнитного поля.

Согласно закону сохранения энергии, энергетический баланс в двигателе за малый отрезок времени  $dt$  выражается как

$$dW_{\text{эл}} = dW_{\text{мех}} + dW_{\text{тепл}} + dW \text{ [Дж]}, \quad (1)$$

где  $dW_{\text{эл}}$  — энергия, потребляемая двигателем от источников электрической энергии;

$dW_{\text{мех}}$  — энергия, затрачиваемая на совершение механической работы;

$dW_{\text{тепл}}$  — энергия, расходуемая на нагрев проводов обмоток управления и катушки возбуждения двигателя;

$dW$  — изменение энергии магнитного поля двигателя.

Энергия, потребляемая двигателем за отрезок времени  $dt$ ,

$$dW_{\text{эл}} = u_{a1}i_{a1}dt + u_{a2}i_{a2}dt + u_{b1}i_{b1}dt + u_{b2}i_{b2}dt + uidt,$$

где  $u_{a1}, u_{a2}, u_{b1}, u_{b2}, u$  — напряжения, подводимые к обмоткам управления и катушке возбуждения двигателя, В;

$i_{a1}, i_{a2}, i_{b1}, i_{b2}, i$  — токи, протекающие по обмоткам управления и катушке возбуждения двигателя, А.

Энергия, затрачиваемая на совершение механической работы за отрезок времени  $dt$ ,

$$dW_{\text{мех}} = Fdx,$$

где  $F$  — механическая сила, перемещающая подвижный элемент двигателя (тяговое усилие), Н;

$dx$  — перемещение подвижного элемента двигателя за отрезок времени  $dt$ , м.

Энергия, расходуемая на нагрев проводов в двигателе за отрезок времени  $dt$ ,

$$dW_{\text{тепл}} = i_{a1}^2 r_{a1} dt + i_{a2}^2 r_{a2} dt + i_{b1}^2 r_{b1} dt + i_{b2}^2 r_{b2} dt + i^2 r dt,$$

где  $r_{a1}, r_{a2}, r_{b1}, r_{b2}, r$  — активные сопротивления проводов обмоток управления и катушки возбуждения двигателя, Ом.

Следовательно, согласно (1), энергетический баланс в двигателе будет описываться таким уравнением

$$\begin{aligned} u_{a1}i_{a1}dt + u_{a2}i_{a2}dt + u_{b1}i_{b1}dt + u_{b2}i_{b2}dt + uidt = \\ = Fdx + i_{a1}^2 r_{a1} dt + i_{a2}^2 r_{a2} dt + i_{b1}^2 r_{b1} dt + i_{b2}^2 r_{b2} dt + i^2 r dt + dW. \end{aligned}$$

Создаваемое тяговое усилие  $F$  из полученного уравнения энергетического баланса имеет вид

$$F = \frac{(u_{a1} - i_{a1}r_{a1})i_{a1}dt}{dx} + \frac{(u_{a2} - i_{a2}r_{a2})i_{a2}dt}{dx} + \frac{(u_{b1} - i_{b1}r_{b1})i_{b1}dt}{dx} + \frac{(u_{b2} - i_{b2}r_{b2})i_{b2}dt}{dx} + \frac{(u - ir)idt}{dx} - \frac{dW}{dx}. \quad (2)$$

После преобразований с учетом закона Кирхгофа и закона электромагнитной индукции для обмоток управления и катушки возбуждения, выражение тягового усилия примет вид

$$F = E_{a1} \frac{d\Phi_{a1}}{dx} + E_{a2} \frac{d\Phi_{a2}}{dx} + E_{b1} \frac{d\Phi_{b1}}{dx} + E_{b2} \frac{d\Phi_{b2}}{dx} + E \frac{d\Phi}{dx} - \frac{dW}{dx}, \quad (3)$$

где  $E_{a1} = w_{a1}i_{a1}$ ,  $E_{a2} = w_{a2}i_{a2}$ ,  $E_{b1} = w_{b1}i_{b1}$ ,  $E_{b2} = w_{b2}i_{b2}$ ,  $E = wi$  — МДС, создаваемые обмотками управления и катушкой возбуждения, А;

$w_{a1}, w_{a2}, w_{b1}, w_{b2}, w$  — количество витков в обмотках управления и катушке возбуждения двигателя.

Приняв, что вся магнитная энергия двигателя сосредоточена в воздушных зазорах под полюсами индуктора, магнитную энергию двигателя можно описать таким выражением

$$W = \frac{\Phi_{a1}^2}{2\lambda_{a1}} + \frac{\Phi_{a2}^2}{2\lambda_{a2}} + \frac{\Phi_{b1}^2}{2\lambda_{b1}} + \frac{\Phi_{b2}^2}{2\lambda_{b2}}, \quad (4)$$

где  $\lambda_{a1} = \frac{1}{R_{a1}}$ ,  $\lambda_{a2} = \frac{1}{R_{a2}}$ ,  $\lambda_{b1} = \frac{1}{R_{b1}}$ ,  $\lambda_{b2} = \frac{1}{R_{b2}}$  — магнитные проводимости воздушных зазоров, Вб/А.

После подстановки выражения магнитной энергии (4) в выражение тягового усилия (3) и выполнения необходимых преобразований

$$F = \frac{\Phi_{a1}^2}{2\lambda_{a1}^2} \frac{d\lambda_{a1}}{dx} + \frac{\Phi_{a2}^2}{2\lambda_{a2}^2} \frac{d\lambda_{a2}}{dx} + \frac{\Phi_{b1}^2}{2\lambda_{b1}^2} \frac{d\lambda_{b1}}{dx} + \frac{\Phi_{b2}^2}{2\lambda_{b2}^2} \frac{d\lambda_{b2}}{dx} + \left( E_{a1} - \frac{\Phi_{a1}}{\lambda_{a1}} \right) \frac{d\Phi_{a1}}{dx} + \left( E_{a2} - \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} \right) \frac{d\Phi_{a2}}{dx} + \left( E_{b1} - \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} \right) \frac{d\Phi_{b1}}{dx} + \left( E_{b2} - \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} \right) \frac{d\Phi_{b2}}{dx} + E \frac{d\Phi}{dx}. \quad (5)$$

Полученное выражение тягового усилия, полученное на основе энергетического баланса в двигателе следует упростить с использованием схемы замещения двигателя.

Полагая, что магнитные сопротивления магнитопроводов двигателя гораздо меньше магнитных сопротивлений воздушных зазоров под полюсами индуктора двигателя, поэтому ими можно пренебречь.

Схема замещения двигателя представлена на рис. 2, где  $E_{a1}, E_{a2}, E_{b1}, E_{b2}$  — МДС, создаваемые обмотками управления;  $E$  — МДС, создаваемая катушкой возбуждения;  $R_{a1}, R_{a2}, R_{b1}, R_{b2}$  — магнитные сопротивления воздушных зазоров под полюсами индуктора двигателя;  $\Phi_{a1}, \Phi_{a2}, \Phi_{b1}, \Phi_{b2}$  — магнитные потоки, протекающие через соответствующие воздушные зазоры;  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий катушку возбуждения.

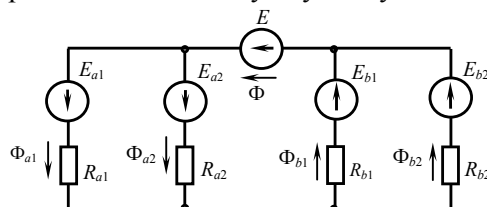


Рис.2. Схема замещения ЛИД с электромагнитным возбуждением

Согласно первому закону Кирхгофа для магнитных цепей можно составить следующие равенства:

$$\Phi_{a2} = \Phi - \Phi_{a1}, \quad \Phi_{b2} = \Phi - \Phi_{b1}. \quad (6)$$

Продифференцировав левые и правые части этих равенств по переменной  $x$ , получим

$$\frac{d\Phi_{a2}}{dx} = \frac{d\Phi}{dx} - \frac{d\Phi_{a1}}{dx}, \quad \frac{d\Phi_{b2}}{dx} = \frac{d\Phi}{dx} - \frac{d\Phi_{b1}}{dx}.$$

С учетом этих равенств, выражение тягового усилия (5) преобразуется к виду

$$F = \frac{\Phi_{a1}^2}{2\lambda_{a1}^2} \frac{d\lambda_{a1}}{dx} + \frac{\Phi_{a2}^2}{2\lambda_{a2}^2} \frac{d\lambda_{a2}}{dx} + \frac{\Phi_{b1}^2}{2\lambda_{b1}^2} \frac{d\lambda_{b1}}{dx} + \frac{\Phi_{b2}^2}{2\lambda_{b2}^2} \frac{d\lambda_{b2}}{dx} + \\ + \left( E_{a1} - \frac{\Phi_{a1}}{\lambda_{a1}} - E_{a2} + \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} \right) \frac{d\Phi_{a1}}{dx} + \left( E_{b1} - \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} - E_{b2} + \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} \right) \frac{d\Phi_{b1}}{dx} + \\ + \left( E_b + E_{a2} - \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} + E_{b2} - \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} \right) \frac{d\Phi}{dx}. \quad (7)$$

Воспользовавшись вторым законом Кирхгофа, будут справедливы равенства

$$E_{a1} - E_{a2} - \frac{\Phi_{a1}}{\lambda_{a1}} + \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} = 0, \\ E_{b1} - E_{b2} - \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} + \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} = 0, \\ E_{a2} + E_{a2} + E_b - \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} - \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} = 0. \quad (8)$$

Левые части полученных равенств представляют собой коэффициенты при производных магнитных потоков в выражении тягового усилия (7). А поскольку, согласно (8), эти коэффициенты равны нулевым значениям, то выражение тягового усилия (7) существенно упрощается, принимая вид

$$F = \frac{\Phi_{a1}^2}{2\lambda_{a1}^2} \frac{d\lambda_{a1}}{dx} + \frac{\Phi_{a2}^2}{2\lambda_{a2}^2} \frac{d\lambda_{a2}}{dx} + \frac{\Phi_{b1}^2}{2\lambda_{b1}^2} \frac{d\lambda_{b1}}{dx} + \frac{\Phi_{b2}^2}{2\lambda_{b2}^2} \frac{d\lambda_{b2}}{dx}. \quad (9)$$

Пренебрегая высшими гармоническими составляющими, магнитные проводимости воздушных зазоров под полюсами индуктора двигателя могут быть представлены в виде

$$\lambda_{a1} = g_0 + g_1 \cos \frac{2\pi}{\tau} x, \quad \lambda_{a2} = g_0 - g_1 \cos \frac{2\pi}{\tau} x, \\ \lambda_{b1} = g_0 + g_1 \sin \frac{2\pi}{\tau} x, \quad \lambda_{b2} = g_0 - g_1 \sin \frac{2\pi}{\tau} x,$$

где  $g_0, g_1$  — постоянная составляющая и амплитуда переменной составляющей магнитных проводимостей воздушных зазоров [6, 7].

После соответствующих преобразований формула тягового усилия примет вид

$$F = \frac{\pi}{\tau} g_1 \left\{ \left[ \left( \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} \right)^2 - \left( \frac{\Phi_{a1}}{\lambda_{a1}} \right)^2 \right] \sin \varphi + \left[ \left( \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} \right)^2 - \left( \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} \right)^2 \right] \cos \varphi \right\}, \quad (10)$$

где  $\varphi = \frac{2\pi}{\tau} x$  — текущее положение индуктора двигателя в угловой форме.

МДС воздушных зазоров  $\Phi_{a1}/\lambda_{a1}$ ,  $\Phi_{a2}/\lambda_{a2}$ ,  $\Phi_{b1}/\lambda_{b1}$ ,  $\Phi_{b2}/\lambda_{b2}$  могут быть найдены из решения схемы замещения двигателя. Для этого, воспользовавшись (6) и (8), составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\Phi_{a1}}{\lambda_{a1}} - \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} = E_{a1} - E_{a2}, \\ \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} - \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} = E_{b1} - E_{b2}, \\ \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} + \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{a1}} = E_{a2} + E_{b1} + E, \\ \frac{\Phi_{a1}}{\lambda_{a1}} \lambda_{a1} + \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} \lambda_{a2} - \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} \lambda_{b1} - \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} \lambda_{b2} = 0. \end{cases}$$

Полагаем, что МДС обмоток управления [5, 7]

$$E_{a2} = -E_{a1} = \frac{E_a}{2}, \quad E_{b1} = -E_{b2} = \frac{E_b}{2}.$$

Путем решения полученной системы уравнений приходим к таким выражениям искомым МДС

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{b2}}{\lambda_{b2}} &= \frac{E_a(\lambda_{a1} - 4g_0) - E_b\lambda_{b2} + 2g_0 \left( E + \frac{E_a + E_b}{2} \right)}{4g_0}, \\ \frac{\Phi_{a2}}{\lambda_{a2}} &= \frac{E_a\lambda_{a1} - E_b\lambda_{b2} + 2g_0 \left( E + \frac{E_a + E_b}{2} \right)}{4g_0}, \\ \frac{\Phi_{b1}}{\lambda_{b1}} &= \frac{E_b\lambda_{b2} - E_a\lambda_{a1} + 2g_0 \left( E + \frac{E_a + E_b}{2} \right)}{4g_0}, \\ \frac{\Phi_{a1}}{\lambda_{a1}} &= \frac{E_b(\lambda_{b2} - 4g_0) - E_a\lambda_{a1} + 2g_0 \left( E + \frac{E_a + E_b}{2} \right)}{4g_0}. \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения МДС воздушных зазоров в выражение тягового усилия (10), после соответствующих преобразований имеем

$$F = \frac{\pi}{\tau} g_1 \left[ E(E_a \sin \varphi + E_b \cos \varphi) + \frac{g_1}{4g_0} (E_a^2 - E_b^2) \sin 2\varphi - \frac{g_1}{2g_0} E_a E_b \cos 2\varphi \right]. \quad (12)$$

Полученный результат представляет собой искомую математическую модель ЛИД с электромагнитным возбуждением, которая отображает зависимость создаваемого двигателем тягового усилия от основных параметров двигателя и от его управляющих воздействий. Основными параметрами двигателя являются МДС  $E$ , создаваемая катушкой возбуждения, зубцовое деление  $\tau$ , постоянная составляющая  $g_0$  и амплитуда переменной составляющей  $g_1$  магнитных проводимостей воздушных зазоров под полюсами индуктора двигателя. В качестве управляющих воздействий рассматриваются МДС  $E_a$  и  $E_b$ , создаваемые обмотками управления.

Учитывая изложенное, можно сделать следующие выводы: получена математическая модель ЛИД с электромагнитным возбуждением, которая отображает зависимость создаваемого двигателем тягового усилия от основных параметров двигателя и от его управляющих воздействий, и которая может быть использована при анализе точности позиционирования двигателя в режиме шагового управления, а также при разработке линейного электропривода с регулируемым тяговым усилием на основе частотно-токового управления.

## Литература

1. Электромагнитный привод робототехнических систем / Афонин А.А., Билозор Р.Р., Гребеников В.В. и др. — К.: Наук. думка, 1986. — 272 с.
2. Ярославцев М.И. Аналіз можливості використання частотно-струмового управління для керування тяговим зусиллям лінійного індукторного двигуна // Вісню Черкас. інженер.-технол. ін-ту. — Черкаси, 2000. — № 2. — С. 170 — 174.
3. Ярославцев М.И. Определение тягового усилия, создаваемого линейным индукторным двигателем с частотно-токовым управлением // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України. — К.: 2006. — № 1. — С. 71 — 79.
4. Пат. 4695777 США, МКИ Н 02 К 41/00. VR type linear stepper motor / Masyo Asano. — № 293311; Заявл. 17.08.81; Опубл. 22.09.87.
5. Пат. 4766358 США, МКИ Н 02 К 41/00. Linear stepping motor / Toshiro Higuchi. — № 418; Заявл. 01.01.87; Опубл. 23.08.88.
6. Пат. 1392753 Великобритании, МКИ Н 02 К 41/02, G 05 D 3/00, Н 02 Р 5/00//G 01 Р 15/08, Н 03 С 3/00 3/10. Positioning system / В.А. Sawyer. — № 38277/74; Заявл. 13.04.72; Опубл.30.04.75.
7. Луценко Е.Е. Выбор и расчет электромагнитных модулей многокоординатных шаговых двигателей / Луценко Е.Е., Баль В.Б. // Тр. МЭИ. — М., 1979. — Вип. 440. — С. 31 — 37.

Поступила в редакцию 28 ноября 2007.

---