УДК 621.923:621.90.17

**С.М. Братан,** д-р техн. наук, доц.,
**Д.Е. Сидоров,** магистр,
**С.Е. Сазонов,** магистр,
Севастоп. нац. техн. ун-т

# СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА СТРУЖКООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ТОНКОМ ШЛИФОВАНИИ

*С.М. Братан, Д.Є. Сидоров, С.Є. Сазонов.* **Стохастичний підхід до моделювання процесу стружкоутворення при тонкому шліфуванні.** Наведено стохастичний опис процесу зйому матеріалу при контактуванні абразивного інструменту і заготовки, що є основою для визначення стохастичних представлень основних технологічних показників процесу тонкого шліфування.

*S.M. Bratan, D.E. Sidorov, S.E. Sazonov.* **Stochastic approach to modelling of shaving-formation process in polish-grinding.** Stochastic description of the process of removal of material at the contact of abrasive instrument and a workpiece is presented, which is the basis for determination of stochastic presentations of basic technological indexes of process of polish-grinding.

При тонком шлифовании съем материала в существенной степени осуществляется в пределах слоя, в котором распределена шероховатость. При моделировании процессов стружкообразования необходимо учитывать специфику происходящих явлений [1, 2] для оценки процессов съема материала в зоне контакта круга и заготовки. В этом случае необходимо уточнение модели взаимодействия абразивных зерен с поверхностным слоем заготовки.

В связи с этим поставлена задача построения математической модели для оценки параметров стружек при чистовом шлифовании.

Для достижения поставленной цели шероховатая поверхность детали представлена нормальной марковской функцией (марковским процессом). В соответствие с теорией выбросов [3, 4] построены оценки нестационарной условной плотности распределения вероятностей прохождении трассы зерна в шероховатом слое детали, которое и определяет основные стохастические параметры стружек.

Для построения математической модели, позволяющей оценивать происходящие явления, необходимо математическое описание формы детали.

Наиболее простым является представление формы круглой детали в полярной системе координат с центром, расположенным в центре детали, и углом $\phi$, отсчитываемом от некоторой фиксированной точки, разложением в ряд Фурье,

$$R(\phi) = R_0 + \sum \mathrm{R}_i \cdot \cos(\omega_i \phi + \mu_i)\,. \tag{1}$$

Представление формы детали в виде (1) справедливо вследствие периодического характера ее формы как функции $\phi$. Конкретные значения соответствующих коэффициентов $R_i$, $i \in \{0...n\}$ могут быть определены в результате измерений соответствующих отстояний образующей детали от ее центра.

Для установившегося режима шлифования можно считать, что деталь вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$, и угол $\phi$ может быть определен как

$$\phi = \omega \cdot t + \mu_0\,. \tag{2}$$

Для высокочастотной составляющей уравнения (1) — компонентам с большими значениями $i$ — определение соответствующей фазы $\mu_i$ в силу ограниченной точности фиксации начальной точки производится со значительной погрешностью, имеющей случайный характер.

Целесообразно использовать представление энергетических спектров (спектров мощности) процессов $S(\omega)$, которые могут быть построены на основе уравнений Винера-Хинчина [3],

$$S(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty K(\phi)\cos(\omega\phi)d\phi,\quad K(\phi)=\int_0^\infty S(\omega)Sin(\omega\phi)d\omega\,, \tag{3}$$

однозначно связывающие корреляционные (взаимокорреляционные) функции $K(\phi)$ и энергетические спектры $S(\omega)$.

Определение конкретного вида корреляционной функции $K(\phi)$ для решения уравнения (3) может быть произведено по круглограмме детали.

Предпочтительным является представление зависимостей (1) в форме (3) как случайного процесса изменения радиуса как функции угла поворота, а, с учетом (2), так и функции времени. Эту зависимость можно моделировать одномерным марковским процессом, считая, что условная плотность вероятности $f(\phi_i,R_i;\phi_j,R_j)$, $\phi_i<\phi_j$ кроме общих условий, которым удовлетворяет всякая плотность вероятностей

$$f(\phi_i,R_i;\phi_j,R_j)>0,\quad f(\phi_i,R_i;\phi_j,\pm\infty)=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi_i,R_i;\phi_j,R_j)dR_j=1\,,$$

удовлетворяет и соотношениям Чепмена-Колмогорова

$$f(\phi_i,R_i;\phi_j,R_j)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\phi_i,R_i;\phi_k,z)f(\phi_k,z;\phi_j,R_j)dz$$

для любого $\phi_i\le\phi_k\le\phi_j$, отражающего факт “гладкости” — непрерывности изменения $R(\phi)$ — отсутствие разрывов функции в дифференциальных уравнениях в частных производных Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial\phi_j}+\frac{\partial}{\partial R_j}[a(\phi_j,R_j)\cdot f]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial {R_j}^2}[b(\phi_j,R_j)\cdot f]=0\,. \tag{4}$$

Функции $a(\phi_i,R_i)$ и $b(\phi_j,R_j)$ характеризуют изменчивость математического ожидания и дисперсии радиуса, соответственно. Для компактности записи опущены соответствующие аргументы плотности вероятности.

В предположении стационарности случайной функции, характеризующей радиус детали за период контакта, параметры уравнения (4) $a(\phi_i,R_i)$ и $b(\phi_j,R_j)$ не зависят от времени, причем $a(\phi_i,R_i)$ является линейной функцией радиуса детали, а $b$ — постоянной величиной. В указанном случае решением системы (4) является плотность нормального закона распределения реализации случайного стохастического процесса, а реализация $R(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dR(\phi)}{d\phi}+\alpha\cdot R(\phi)=\beta\cdot\xi(\phi)\,, \tag{5}$$

где $\xi(\phi)$ и $\beta={}^{\sigma_R}\!/_{\sigma}$ — нормальный белый шум единичной интенсивности и интенсивность входного воздействия, соответственно.

Решением стохастического уравнения (5) при начальном условии $R(0)=R_0$ является

$$R(\phi)=R_0\exp(-\alpha\phi)+\beta\exp(-\alpha\phi)\int_0^\phi \exp[\alpha\xi(x)]dx\,. \tag{6}$$

В соответствие (3) соотношению (5) следует спектральная плотность и корреляционная функция вида

$$S_R(\omega) = \frac{\alpha\sigma_R^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}, \tag{7}$$

$$K_R(\phi) = \sigma_R^2 \exp(-\alpha|\phi|). \tag{8}$$

Справедливо и обратное [5]. Нормальные стационарные процессы с корреляционными функциями вида (7) или спектральными плотностями (8) являются марковскими. К таким процессам или к $n$-мерным марковским процессам с более сложным описанием следует отнести основные классы нормальных случайных процессов при шлифовании, которые могут быть представлены энергетическими спектрами с дробно-рациональным представлением [4].

Вероятность того, что ордината марковского процесса $R(\phi)$ при прохождении режущей кромкой пути $\phi$ ни разу не выйдет за границы интервала $(R_1, R_2)$ определится зависимостью

$$W(\phi) = \int_{R_1}^{R_2} w(\phi, y)dy, \tag{9}$$

где $w(\phi, R)$ — удовлетворяет второму уравнению системы (4)

$$\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial R}(aw) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(bw) = 0 \tag{10}$$

с граничными и начальными условиями, $w(\phi, R_1) = w(\phi, R_2) = 0$ при $R \geq 0$, $w(\phi, R)\big|_{\varphi=0} = \delta(R - x)$, если задано начальное значение ординаты $x$ процесса $w(\phi, R)\big|_{\varphi=0} = w(R)$ и если задана плотность вероятности ординаты процесса при

$$\phi = 0 + 0. \tag{11}$$

Для вычисления коэффициентов $a(\phi, R)$ и $b(\phi, R)$ могут быть использованы соотношение (5) с учетом требований (4), приближенного разложения $\exp(-\alpha\Delta\phi) \approx 1 - \alpha\Delta\phi$ для $\alpha\Delta\phi << 1$ и учета стробирующих свойств дельта функции,

$$a(\phi, R) = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{\Delta\phi}\left\langle R(\phi + \Delta\phi) - R(\phi)\big| R(\phi)\right\rangle = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{\Delta\phi}[\exp(\alpha\Delta\phi) - 1] = -\alpha R = a(R), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} b(\phi,R) &= \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{\Delta\phi}\left\langle [R(\phi+\Delta\phi) - R(\phi)]\big| R(\phi)\right\rangle = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{\Delta\phi}\{R^2[\exp(\alpha\cdot\Delta\phi) - 1]^2 + \\ &+\beta^2\exp[-2\alpha(\phi+\Delta\phi)]\int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi}\int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi}\exp[\alpha(x+y)]\langle\xi(x)\xi(y)\rangle dxdy\} = \\ &= \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{\Delta\phi}\beta^2\exp[-2\alpha(\phi+\Delta\phi)]\frac{\Xi_0}{2}\int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi}\int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi}\exp[\alpha(x+y)]\delta(y-x)dxdy = \\ &= \beta^2\frac{\Xi_0}{2} = \text{const}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\langle\Psi(q)\rangle$ — математическое ожидание соответствующего аргумента (функции), а параметры $\alpha$, $\beta$, $\Xi$ соответствуют (5).

С учетом (12), (13) обратное уравнение Колмогорова (4) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\phi, R) = \alpha\frac{\partial}{\partial R}(Rw) + \frac{\beta^2\Xi_0}{4}\frac{\partial^2}{\partial R^2}w, \tag{14}$$

которое может быть решено методом Гаусса представлением функции $w(R, \phi)$ в виде

$$w(\phi, R) = \Lambda(R)\cdot\Omega(\phi). \tag{15}$$

Деление левой и правой частей (14) на (15) приводит после соответствующих преобразований к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial\phi}=-\gamma^2,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}[b(R)\Lambda(R)]-\frac{\partial}{\partial R}[a(R)\Lambda(R)]+\gamma^2\Lambda(R)=0\,, \tag{16}$$

решением первого из которых является

$$\Omega(\phi)=\exp(-\gamma^2\phi)\,. \tag{17}$$

Второе уравнение системы (16) может быть определено известными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, и для рассматриваемого случайного процесса

$$w(\phi,R)=w_{st}(R)\{\Omega_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n(R)\Omega_n\exp[-\gamma_n{}^2(\phi-\phi_0)]\}\,, \tag{18}$$

где $\Omega_i$ — постоянные коэффициенты,

$\Lambda_i(R)$ — ортонормированные собственные функции второго уравнения системы (16), соответствующие собственным значениям $\gamma^2$, т.е.

$$\int\frac{\Lambda_i(R)\cdot\Lambda_j(R)}{w_{st}(R)}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{при}\quad i=j\\ 0 & \text{при}\quad i\neq j\end{cases}.$$

При заданной начальной плотности вероятности $w(R,\phi)=w_0(R)$ коэффициенты $\Omega_n$ определятся как

$$\Omega_n=\int\frac{w_0(R)\Lambda(R)}{w_{st}(R)}dR\,,$$

а в случае заданной начальной ординаты процесса $w_0(R)=\delta(R-R_0)$ и

$$w(\phi,R)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda_n(R_0)\Lambda_n(R)}{w_{st}(R)}\exp[-\gamma_n{}^2(\phi-\phi_0)]\}\,,\ \Lambda_0(R)=w_{st}(R),\ \ \gamma_0=0.$$

Для рассматриваемого случая одномерного нормального Марковского процесса при начальном условии $R(0)=R_0$ решение может быть представлено в форме

$$w(\phi,R_{|R_0,0})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2[1-\exp(-2\alpha\phi)]}}\exp\left\{-\frac{[R-R_0\exp(-\alpha\phi)]^{\,2}}{2\sigma^2[1-\exp(-2\alpha\phi)]}\right\}, \tag{19}$$

которая представляет собой нестационарную условную плотность вероятности.

Из (19) непосредственно определяются нестационарное математическое ожидание и нестационарная дисперсия процесса как

$$\begin{aligned}M(\phi)&=R_0\exp(-\alpha\phi),\\ D(\phi)&=\sigma^2[1-\exp(-2\alpha\phi)].\end{aligned} \tag{20}$$

В предположении больших величин

$$\phi>>1/\alpha\,, \tag{21}$$

что справедливо, например, для случая торцевого шлифования, может быть получена и непосредственно использована установившаяся плотность условной вероятности, а ее параметры могут быть непосредственно оценены по соотношениям (19), (20), т.е.

$$w_{st}(R)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right),\ \sigma^2=\frac{\beta^2}{4\alpha}\Xi_0\,. \tag{22}$$

Соотношение (19) и его стационарное представление (22) с учетом известной функции плотности вероятности распределения режущих кромок инструмента по глубине рабочего слоя [6]

$$f(R) = C_f R^{\chi-1}, \tag{23}$$

(здесь $C_f$ — коэфициент, вычисляемый из условия равенства единице площади, ограниченой кривой распределения $C_f = \frac{\chi}{H_R^{\chi}}$, где $H_R$ — величина слоя рабочей поверхности круга по глубине, в пределах которой подсчитывается число активных зерен) позволяет получить зависимость для плотности вероятности съема материала при тонком шлифовании в виде

$$w(\phi, R) = w(\phi, R_{|R_0,0}) f(R), \tag{24}$$

или для стационарного случая

$$w_{st}(R) = \frac{\chi}{H_R^{\chi} \sigma\sqrt{2\pi}} R^{\chi-1} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right). \tag{25}$$

Выражения (24), (25) представляют собой стохастическое описание процесса съема материала при контактировании абразивного инструмента и заготовки и являются основой для определения стохастических представлений основных технологических показателей процесса тонкого шлифования.

**Литература**


1. Семко М.Ф. Основы алмазного шлифования / Семко М.Ф., Грабченко А.И. и др. — К.: Техника, 1978. — 192 с.
2. Новоселов Ю.К. Динамика формообразования поверхностей при абразивной обработке. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1979. — 232 с.
3. Прохоров Ю.В. Теория вероятностей / Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. —М.: Наука, 1973. — 496 с.
4. Хусу А.П. Шероховатость поверхностей / Хусу А.П., Витенберг Ю.Р. и др. — М: Наука, 1975. — 344 с.
5. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / Гихман И.И., Скороход А.В. — М.: Наука, 1977. — 586 с.
6. Новоселов Ю.К. Динамика формообразования поверхностей при абразивной обработке. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1979. — 232 с.


Поступила в редакцию 26 января 2007 г.