

УДК 539.3

**В.Ф. Оробей**, д-р техн. наук, проф.,  
**Г.В. Кострова**, канд. техн. наук, доц.,  
Одес. нац. политехн. ун-т

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*В.Ф. Оробей, Г.В. Кострова.* Численно-аналитичне розв'язання крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Запропоновано методику розв'язання крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами на прикладі задач стійкості плоскої форми згину тонкостінних стержневих систем. Проінтегровано рівняння стійкості тонкостінного стержня при постійному значенні згинального моменту, а розв'язання задачі Коші подано в нормальній формі. Формується рівняння крайової задачі дискретизованої стержневої системи за алгоритмом методу граничних елементів, а критичні сили і моменти визначаються з трансцендентного рівняння.

*V.F. Orobey, G.V. Kostrova.* Numerical-analytical solution of boundary problems for the systems of ordinary differential equations with variable coefficients. The procedure of solving boundary problems for the systems of ordinary differential equations with variable coefficients is proposed, using the problems of flat shape stability in thin-walled rod systems bending as an example. The equations of thin-walled rod stability with the constant value of the bending moment have been integrated, and the solution of Cauchy problem is presented in a normal form. The equations for a boundary problem of a discretized rod system is formed by the algorithm of elements method, and the critical forces and moments are determined from the transcendental equation.

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является актуальной проблемой прикладных наук, поскольку соответствующая теория до настоящего времени не разработана. Поэтому предпринята попытка в какой-то мере восполнить существующий пробел на примере задач устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержневых систем.

Проблема устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней впервые была освещена в работах С.П. Тимошенко еще в 1905...1906 г.г.

В.З. Власов предложил общую теорию пространственной устойчивости тонкостенных стержней, из которой, как частный случай, следовали уравнения С.П. Тимошенко изгибно-крутильной устойчивости двутавровой балки [1]. С тех пор существенного прогресса в решении задач устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней открытого профиля не произошло и основные результаты принадлежат С.П. Тимошенко. Связано это с трудностями интегрирования уравнений устойчивости, которые содержат переменные коэффициенты. По этой причине известны решения только для случаев, когда поперечная нагрузка вызывает лишь один закон изменения изгибающего момента по длине стержня. Под это условие подводятся и задачи устойчивости при симметричной эпюре изгибающего момента. Таким образом, проблема решения задач устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержневых систем нуждается в дальнейшем развитии. В этой связи предлагается новая методика решения наиболее сложных в теории устойчивости задач, когда снимаются ограничения на крайевые условия, можно учесть любую поперечную нагрузку в любой комбинации и любую структуру стержневой системы, включая рамы и неразрезанные балки. Для этого необходимо привлечь решение системы дифференциальных уравнений устойчивости и алгоритм численно-аналитического варианта метода граничных элементов (МГЭ), предложенного одним из авторов. Наиболее полно данный вариант МГЭ представлен в работе [2], с которой можно ознакомиться на сайтах [www.listlib.narod.ru](http://www.listlib.narod.ru), [www.odsopromat.narod.ru](http://www.odsopromat.narod.ru).

*Интегрирование уравнений устойчивости.* Рассмотрим наиболее простой вариант этих уравнений, когда открытый тонкостенный профиль имеет две оси симметрии, поперечная нагрузка действует в плоскости симметрии и изгибающий момент постоянен по длине стержня. Уравнения устойчивости для стержня постоянного сечения с левовинтовой системой координат (рис. 1) принимают вид [1]

$$\begin{cases} EJ_y w^{IV}(x) + M_z \theta''(x) = 0, \\ EJ_w \theta^{IV}(x) - GJ_\alpha \theta''(x) + M_z w''(x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $w(x)$  — перемещение точки оси стержня в направлении оси  $Oz$ ;

$\theta(x)$  — угол закручивания стержня вокруг оси  $Ox$ ;

$EJ_y$  — поперечная жесткость сечения стержня в плоскости  $xOz$ ;

$EJ_w$  — секториальная жесткость;

$GJ_\alpha$  — жесткость при кручении;

$M_z$  — изгибающий момент в сечении стержня относительно оси  $Oz$ , вызванный заданной поперечной нагрузкой.

Система уравнений (1) решена только для частных случаев граничных условий и поперечной нагрузки [3]. Представим решение системы (1) для двух случаев:

1. Изгибающий момент  $M_z = 0$ . Такие участки стержня могут встречаться.
2. Изгибающий момент  $M_z = \text{const}$ . В реальных конструкциях это частный случай.

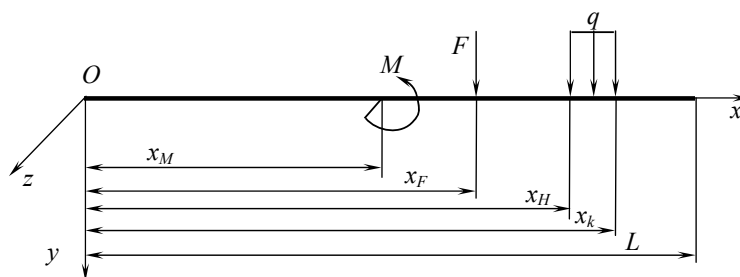


Рис. 1. Система координат и поперечная нагрузка тонкостенного стержня

Если же  $M_z(x)$  — какая-либо функция от координаты  $x$ , то ее заменяем ступенчатой зависимостью — кусочно-постоянной функцией  $M_z$ . В первом случае система уравнений (1) распадается на уравнения изгиба в плоскости  $xOz$  и стесненного кручения

$$\begin{cases} EJ_y w_{(x)}^{IV} = 0, \\ EJ_w \theta_{(x)}^{IV} - GJ_\alpha \theta_{(x)}'' = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В рамках алгоритма МГЭ решение системы (2) представим в матричной форме. В данном случае это комбинация фундаментальных решений изгиба и кручения

		1	2	3	4	5	6	7	8	
$EJ_y w(x)$	1	1	$x$	$-x^2/2$	$-x^3/6$					$EJ_y w(0)$
$EJ_y \varphi(x)$	2		1	$-x$	$-x^2/2$					$EJ_y \varphi(0)$
$M_y(x)$	3			1	$x$					$M_y(0)$
$Q_z(x)$	4				1					$Q_z(0)$
$GJ_\alpha \theta(x)$	5					1	$x$	$-a_{57}$	$-a_{58}$	$GJ_\alpha \theta(0)$
$GJ_\alpha \theta'(x)$	6						1	$-a_{67}$	$-a_{57}$	$GJ_\alpha \theta'(0)$
$B_w(x)$	7							$a_{77}$	$a_{78}$	$B_w(0)$
$M_w(x)$	8							$a_{67}$	$a_{77}$	$M_w(0)$

где фундаментальные ортонормированные функции кручения имеют вид [1]

$$a_{57} = \operatorname{ch} kx - 1; \quad a_{58} = \frac{\operatorname{sh} kx - kx}{k}; \quad a_{67} = k \operatorname{sh} kx; \quad (4)$$

$$a_{77} = \operatorname{ch} kx; \quad a_{78} = \frac{\operatorname{sh} kx}{k}; \quad k = \sqrt{\frac{GJ_\alpha}{EJ_w}}.$$

Во втором случае система (1) будет являться связанной системой двух уравнений, которые с начальными параметрами (3) образуют задачу Коши устойчивости плоской формы изгиба. Полное ее решение, отвечающее любым граничным условиям тонкостенного стержня, получается после ряда операций.

Из первого уравнения системы (1) следует зависимость между углом закручивания и второй производной прогиба

$$EJ_y w''_{(x)} + M_z \theta(x) = Ax + B, \quad (5)$$

где константы интегрирования определяются из начальных условий

$$B = EJ_y w''_{(0)} + M_z \theta(0), \quad A = EJ_y w'''_{(0)} + M_z \theta'(0). \quad (6)$$

С помощью зависимости (5) система (1) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$w^{VI}_{(x)} - k^2 w^{IV}_{(x)} - \frac{k^2 M_z^2}{EJ_y GJ_\alpha} w''_{(x)} = 0. \quad (7)$$

Корнями характеристического уравнения для (7) будут два кратных действительных значения, равных нулю, два действительных разных и два мнимых

$$t_{1,2} = 0; \quad t_{3,4} = \pm a = \pm \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + s^4}}; \quad t_{5,6} = \pm b = \pm i \sqrt{-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + s^4}}, \quad (8)$$

где  $s^4 = \frac{M_z^2}{EJ_y GJ_w} > 0$ .

В соответствии с этим, общее решение уравнения (7) запишется в виде

$$w(x) = C_1 1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} ax + C_4 \operatorname{sh} ax + C_5 \cos bx + C_6 \sin bx. \quad (9)$$

Константы интегрирования находятся из системы линейных уравнений при  $x=0$

	1	2	3	4	5	6		
1	1		1		1		$C_1$	$w(0)$
2		1		$a$		$b$	$C_2$	$\varphi(0)$
3			$a^2$		$-b^2$		$C_3$	$-\frac{M_y(0)}{EJ_y}$
4				$a^3$		$-b^3$	$C_4$	$\frac{Q_z(0)}{EJ_y}$
5			$a^4$		$b^4$		$C_5$	$\frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} B_w(0)$
6				$a^5$		$b^5$	$C_6$	$\frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} M_w(0)$

$$= \quad (10)$$

где последние два уравнения формируются с помощью зависимости (5). Решение системы (10) приводит к следующим выражениям

$$\begin{aligned}
 C_1 &= w(0) + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \left[ -\frac{M_y(0)}{EJ_y} \right] - \frac{1}{a^2 b^2} \frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} B_w(0); \\
 C_2 &= \varphi(0) + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \left[ -\frac{Q_z(0)}{EJ_y} \right] - \frac{1}{a^2 b^2} \frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} M_w(0); \\
 C_3 &= \frac{b^2}{a^2(a^2 + b^2)} \left[ -\frac{M_y(0)}{EJ_y} \right] + \frac{1}{a^2(a^2 + b^2)} \frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} B_w(0); \\
 C_4 &= \frac{b^2}{a^3(a^2 + b^2)} \left[ -\frac{Q_z(0)}{EJ_y} \right] + \frac{1}{a^3(a^2 + b^2)} \frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} M_w(0); \\
 C_5 &= \frac{a^2}{b^2(a^2 + b^2)} \left[ -\frac{M_y(0)}{EJ_y} \right] + \frac{1}{b^2(a^2 + b^2)} \frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} B_w(0); \\
 C_6 &= \frac{a^2}{b^3(a^2 + b^2)} \left[ -\frac{Q_z(0)}{EJ_y} \right] + \frac{1}{b^3(a^2 + b^2)} \frac{k^2 M_z}{EJ_y GJ_\alpha} M_w(0).
 \end{aligned} \quad (11)$$

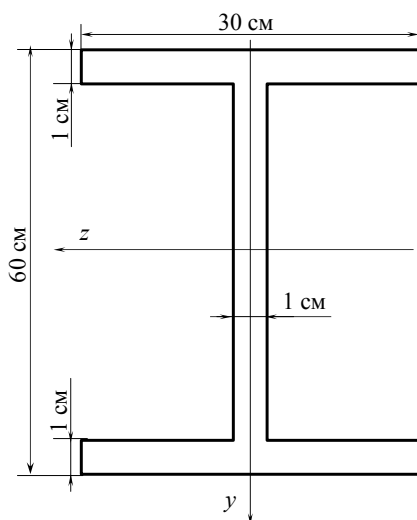


Рис. 2. Поперечное сечение тонкостенного стержня

Если подставить константы (11) в уравнение (9) и пронормировать фундаментальные функции, то получается окончательное выражение для прогиба. Дифференцированием прогиба определяются остальные параметры изгибно-крутильной формы потери устойчивости. В матричном представлении решение системы (1) можно записать следующим образом

		1	2	3	4	5	6	7	8	
$EJ_y w(x)$	1	1	$x$	$-A_{13}$	$-A_{14}$			$-A_{17}$	$-A_{18}$	$EJ_y w(0)$
$EJ_y \varphi(x)$	2		1	$-A_{23}$	$-A_{13}$			$-A_{27}$	$-A_{17}$	$EJ_y \varphi(0)$
$M_y(x)$	3			$A_{33}$	$A_{23}$			$A_{37}$	$A_{27}$	$M_y(0)$
$Q_z(x)$	4			$A_{43}$	$A_{33}$			$A_{47}$	$A_{37}$	$Q_z(0)$
$GJ_\alpha \theta(x)$	5			$-A_{53}$	$-A_{54}$	1	$x$	$-A_{57}$	$-A_{58}$	$GJ_\alpha \theta(0)$
$GJ_\alpha \theta'(x)$	6			$-A_{63}$	$-A_{53}$		1	$-A_{67}$	$-A_{57}$	$GJ_\alpha \theta'(0)$
$B_w(x)$	7			$A_{73}$	$A_{74}$			$A_{77}$	$A_{78}$	$B_w(0)$
$M_w(x)$	8			$A_{83}$	$A_{73}$			$A_{87}$	$A_{77}$	$M_w(0)$

(12)

где фундаментальные ортонормированные функции совместного изгиба и кручения тонкостенного стержня принимают вид

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= \frac{a^4 - b^4 + b^4 \operatorname{ch} ax - a^4 \cos bx}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}; & A_{14} &= \frac{ab(a^4 - b^4)x + b^5 \operatorname{sh} ax - a^5 \sin bx}{a^3 b^3 (a^2 + b^2)}; \\
 A_{17} &= \frac{(a^2 + b^2) - b^2 \operatorname{ch} ax - a^2 \cos bx}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} \frac{M_z}{EJ_w}; & A_{18} &= \frac{ab(a^2 + b^2)x - b^3 \operatorname{sh} ax - a^3 \sin bx}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} \frac{M_z}{EJ_w}; \\
 A_{23} &= \frac{b^3 \operatorname{sh} ax + a^3 \sin bx}{ab(a^2 + b^2)}; & A_{27} &= \frac{-b \operatorname{sh} ax + a \sin bx}{ab(a^2 + b^2)} \frac{M_z}{EJ_w}; \\
 A_{33} &= \frac{b^2 \operatorname{ch} ax + a^2 \cos bx}{a^2 + b^2}; & A_{37} &= \frac{-\operatorname{ch} ax + \cos bx}{a^2 + b^2} \frac{M_z}{EJ_w}; \\
 A_{43} &= \frac{ab^2 \operatorname{sh} ax - a^2 b \sin bx}{a^2 + b^2}; & A_{47} &= \frac{-a \operatorname{sh} ax - b \sin bx}{a^2 + b^2} \frac{M_z}{EJ_w}; \\
 A_{53} &= \left(1 - \frac{b^2 \operatorname{ch} ax + a^2 \cos bx}{a^2 + b^2}\right) \frac{GJ_\alpha}{M_z}; & A_{54} &= \left[x - \frac{b^3 \operatorname{sh} ax + a^3 \sin bx}{ab(a^2 + b^2)}\right] \frac{GJ_\alpha}{M_z}; \\
 A_{57} &= \frac{(\operatorname{ch} ax - \cos bx)k^2}{a^2 + b^2}; & A_{58} &= \frac{(b \operatorname{sh} ax - a \sin bx)k^2}{ab(a^2 + b^2)}; \\
 A_{63} &= \frac{-ab^2 \operatorname{sh} ax + a^2 b \sin bx}{a^2 + b^2} \frac{GJ_\alpha}{M_z}; & A_{67} &= \frac{(a \operatorname{sh} ax + b \sin bx)k^2}{ab(a^2 + b^2)}; \\
 A_{73} &= \frac{-a^2 b^2 \operatorname{ch} ax + a^2 b^2 \cos bx}{a^2 + b^2} \frac{EJ_w}{M_z}; & A_{74} &= \frac{-ab^2 \operatorname{sh} ax + a^2 b \sin bx}{a^2 + b^2} \frac{EJ_w}{M_z}; \\
 A_{77} &= \frac{a^2 \operatorname{ch} ax + b^2 \cos bx}{a^2 + b^2}; & A_{78} &= \frac{a \operatorname{sh} ax + b \sin bx}{a^2 + b^2}; \\
 A_{83} &= \frac{-a^3 b^2 \operatorname{sh} ax + a^2 b^3 \sin bx}{a^2 + b^2} \frac{EJ_w}{M_z}; & A_{87} &= \frac{a^3 \operatorname{sh} ax + b^3 \sin bx}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Величину изгибающего момента в сечении стержня удобно представлять выражением

$$M_z = a_M M + a_F F + a_q q, \tag{14}$$

где  $a_M, a_F, a_q$  — изгибающие моменты, вызванные соответствующей поперечной нагрузкой, равной единице;

$M, F, q$  — критические значения заданной поперечной нагрузки.

Для определения критического изгибающего момента необходимо составить уравнение краевой задачи и найти корни трансцендентного уравнения [2]

$$|\mathbf{A}_*(M, F, q)| = 0. \quad (15)$$

*Задачи устойчивости при произвольной функции  $M_z$ .* Данный случай наиболее полно отвечает реальным условиям нагружения стержневых систем. Однако проинтегрировать уравнения устойчивости В.З. Власова [1] в этих условиях не представляется возможным. Для решения таких задач предлагается заменить произвольный закон изменения  $M_z$  ступенчатой зависимостью, т.е. система с распределенными параметрами заменяется множеством систем с постоянными параметрами. Чем больше таких упрощенных систем, тем ближе построенная модель к заданной системе. Этот подход хорошо известен и применяется не только в механике, но и в других науках. Таким образом, для решения задач устойчивости плоской формы изгиба при любой поперечной нагрузке необходимо дискретизировать стержневую конструкцию на множество элементов, определить для каждого элемента значение  $M_{zi} = \text{const}$  и в рамках алгоритма МГЭ сформировать уравнение (15) из матриц  $\mathbf{A}_i$  уравнения (12). Если будут встречаться участки с  $M_z = 0$ , то для них нужно привлечь матрицу  $\mathbf{A}_i$  уравнения (3). Для повышения точности приближенной модели значения  $M_{zi}$ , очевидно, необходимо вычислять в середине каждого участка. При большом числе участков можно получить достаточно точное решение задачи с произвольной функцией  $M_z$ .

*Задача 1.* Применим данный подход к задаче С.П. Тимошенко (рис. 3) [1]. Уравнения устойчивости проинтегрированы в бесконечных рядах. Для сечения по рис. 2 и  $l=10$  м безразмерный коэффициент

$$m^2 = \frac{GJ_\alpha l^2}{EJ_w} = 4,0708,$$

$k=31,9$  [1] и первая критическая сила (приближенное значение)

$$F_1 = \frac{k \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2} = 170,84 \text{ кН}. \quad (16)$$

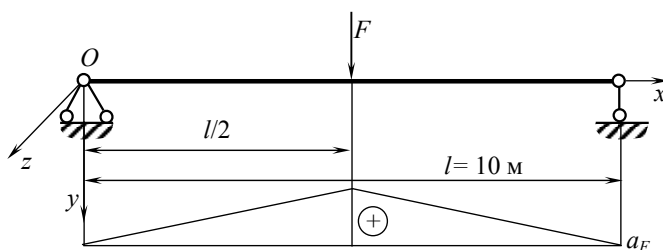


Рис. 3. Задача устойчивости балки при переменном изгибающем моменте

Результаты решения задачи (рис. 3) по предложенному подходу сведены в табл. 1.

Таблица 1

## Критические силы задачи устойчивости Тимошенко

Число участков дискретизации стержня $n$	Критические силы $F_i = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$ , кН; коэффициенты $\lambda_i$				
	1	2	3	4	5
10	$F_1 = 176,5$ $\lambda_1 = 32,9564$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1937,5$ $\lambda_3 = 361,773$	$F_4 = 3516,5$ $\lambda_4 = 656,607$	$F_5 = 5609,5$ $\lambda_5 = 1047,415$
20	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,7696$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1921,5$ $\lambda_3 = 358,786$	$F_4 = 3522,5$ $\lambda_4 = 657,727$	$F_5 = 5550,5$ $\lambda_5 = 1036,399$
30	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,7696$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1919,5$ $\lambda_3 = 358,412$	$F_4 = 3522,5$ $\lambda_4 = 657,727$	$F_5 = 5542,5$ $\lambda_5 = 1034,905$
40	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,7696$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1918,5$ $\lambda_3 = 358,226$	$F_4 = 3522,5$ $\lambda_4 = 657,727$	$F_5 = 5539,5$ $\lambda_5 = 1034,345$
100	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,7696$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1917,5$ $\lambda_3 = 358,039$	$F_4 = 3522,5$ $\lambda_4 = 657,727$	$F_5 = 5536,5$ $\lambda_5 = 1033,785$

Из табл. 1 следует, что первая критическая сила отличается от результата С.П. Тимошенко всего на 2,7 %, т.е. они практически совпадают. Также очевидно, что разбиение стержня на 20 участков уже обеспечивает достаточную точность результатов. Для иллюстрации возможностей предлагаемого подхода ниже в табл. 2 представлены различные задачи, которые не решаются методикой С.П. Тимошенко (эпюры  $M_z$  несимметричны). Все стержни в табл. 2 разбивались на 30 участков. Формирование матрицы  $A_*$  для отдельных балок выполнялось по алгоритму МГЭ. Граничные условия балок в плоскостях  $xOy$  и  $xOz$  одинаковы.

Таблица 2

## Критические силы и моменты тонкостенных балок в зависимости от координат нагрузки

2		$F_1 = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}$ , кН					
		$b_F$	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l
		$\lambda_i$	111,39	57,42	40,99	34,45	32,77
3		$F_1 = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}$ , кН					
		$b_F$	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l
		$\lambda_i$	3576,86	737,13	347,04	239,48	214,46
4		$F_1 = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}$ , кН					
		$b_F$	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l
		$\lambda_i$	1957,89	460,39	206,06	126,51	95,70
		$b_F$	0,6l	0,7l	0,8l	0,9l	
		$\lambda_i$	85,80	90,47	117,36	219,32	

5		$\frac{M_1}{l} = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}, \text{ кН}$ <table border="1"> <tr> <td><math>b_M</math></td> <td>0</td> <td>0,1l</td> <td>0,2l</td> <td>0,3l</td> <td>0,4l</td> <td>0,5l</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>11,08</td> <td>11,29</td> <td>12,52</td> <td>15,73</td> <td>23,11</td> <td>–</td> </tr> </table>	$b_M$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l	$\lambda_i$	11,08	11,29	12,52	15,73	23,11	–														
$b_M$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l																								
$\lambda_i$	11,08	11,29	12,52	15,73	23,11	–																								
6		$\frac{M_1}{l} = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}, \text{ кН}$ <table border="1"> <tr> <td><math>b_M</math></td> <td>0</td> <td>0,1l</td> <td>0,2l</td> <td>0,3l</td> <td>0,4l</td> <td>0,5l</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>–</td> <td>156,76</td> <td>72,38</td> <td>60,80</td> <td>71,44</td> <td>–</td> </tr> </table>	$b_M$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l	$\lambda_i$	–	156,76	72,38	60,80	71,44	–														
$b_M$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l																								
$\lambda_i$	–	156,76	72,38	60,80	71,44	–																								
7		$\frac{M_1}{l} = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}, \text{ кН}$ <table border="1"> <tr> <td><math>b_M</math></td> <td>0</td> <td>0,1l</td> <td>0,2l</td> <td>0,3l</td> <td>0,4l</td> <td>0,5l</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>–</td> <td>95,35</td> <td>45,11</td> <td>33,16</td> <td>31,86</td> <td>38,95</td> </tr> <tr> <td><math>b_M</math></td> <td>0,6l</td> <td>0,7l</td> <td>0,8l</td> <td>0,9l</td> <td>1,0l</td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>62,67</td> <td>42,31</td> <td>27,94</td> <td>22,55</td> <td>21,67</td> <td></td> </tr> </table>	$b_M$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l	$\lambda_i$	–	95,35	45,11	33,16	31,86	38,95	$b_M$	0,6l	0,7l	0,8l	0,9l	1,0l		$\lambda_i$	62,67	42,31	27,94	22,55	21,67	
$b_M$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l																								
$\lambda_i$	–	95,35	45,11	33,16	31,86	38,95																								
$b_M$	0,6l	0,7l	0,8l	0,9l	1,0l																									
$\lambda_i$	62,67	42,31	27,94	22,55	21,67																									
8		$q_1 l = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}, \text{ кН}$ <table border="1"> <tr> <td><math>b_q</math></td> <td>0</td> <td>0,1l</td> <td>0,2l</td> <td>0,3l</td> <td>0,4l</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>2223,05</td> <td>753,46</td> <td>475,23</td> <td>372,53</td> <td>333,32</td> </tr> </table>	$b_q$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	$\lambda_i$	2223,05	753,46	475,23	372,53	333,32																
$b_q$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l																									
$\lambda_i$	2223,05	753,46	475,23	372,53	333,32																									
9		$q_1 l = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}, \text{ кН}$ <table border="1"> <tr> <td><math>b_q</math></td> <td>0</td> <td>0,1l</td> <td>0,2l</td> <td>0,3l</td> <td>0,4l</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>467764,24</td> <td>13099,27</td> <td>4733,66</td> <td>2800,05</td> <td>2223,05</td> </tr> </table>	$b_q$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	$\lambda_i$	467764,24	13099,27	4733,66	2800,05	2223,05																
$b_q$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l																									
$\lambda_i$	467764,24	13099,27	4733,66	2800,05	2223,05																									
10		$q_1 l = \frac{\lambda_i \sqrt{EJ_y GJ_\alpha}}{l^2}, \text{ кН}$ <table border="1"> <tr> <td><math>b_q</math></td> <td>0</td> <td>0,1l</td> <td>0,2l</td> <td>0,3l</td> <td>0,4l</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>59660,95</td> <td>40987,72</td> <td>2903,69</td> <td>1567,62</td> <td>1082,11</td> </tr> <tr> <td><math>b_q</math></td> <td>0,5l</td> <td>0,6l</td> <td>0,7l</td> <td>0,8l</td> <td>0,9l</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda_i</math></td> <td>893,51</td> <td>867,37</td> <td>1007,42</td> <td>1507,86</td> <td>4353,66</td> </tr> </table>	$b_q$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	$\lambda_i$	59660,95	40987,72	2903,69	1567,62	1082,11	$b_q$	0,5l	0,6l	0,7l	0,8l	0,9l	$\lambda_i$	893,51	867,37	1007,42	1507,86	4353,66				
$b_q$	0	0,1l	0,2l	0,3l	0,4l																									
$\lambda_i$	59660,95	40987,72	2903,69	1567,62	1082,11																									
$b_q$	0,5l	0,6l	0,7l	0,8l	0,9l																									
$\lambda_i$	893,51	867,37	1007,42	1507,86	4353,66																									

**Заключение.** Из вышеприведенного следует, что предложенная методика обладает большими возможностями при решении задач устойчивости плоской формы изгиба любых стержневых систем при любой комбинации поперечной нагрузки. Результаты отличаются высокой точностью и достоверностью. Не представляет трудностей и учет непрерывно и дискретно изменяющейся жесткости стержней. Процесс расчета освобождается от применения специальных функций типа функций Бесселя. Важным выводом данной работы является также положение о том, что численно-аналитический вариант МГЭ [2] позволяет решать краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Сам алгоритм имеет универсальный набор операций и пригоден для задач любого линейного процесса.

### Литература

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. — М.: Физматгиз, 1959. — 568 с.
2. Баженов В.А. Численные методы в механике / Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. — Одесса: Стандарт, 2005. — 564 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968. — Т. 3. — 568 с.

Поступила в редакцию 6 апреля 2007 г.