

УДК 539.319:621.81+539.4

Д.Л. Семенов, канд. техн. наук, доц. Одес. нац. политехн. ун-т

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ КОНТАКТНОЙ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Д.Л. Семенов. Розв'язання задач теорії пружності, що використовуються для оцінки контактної міцності і жорсткості деталей машин. Наведено аналіз розв'язань задач Буссінеска, Мітчела та Фламана. Запропоноване альтернативне розв'язання задачі Мітчела. Порівняні результати визначення переміщень.

D.L. Semenov. Solutions of some classical problems of the theory of elasticity. The analysis of solutions of Bussinesk's, Mitchel's and Flaman's problems is presented. Their alternative solutions are offered. The results of displacements determination are compared.

Известные решения задач теории упругости Буссинеска, Митчела и Фламана используются для установления связи между перемещениями и нагрузками при построении расчетных моделей (РМ) для определения напряжений и деформаций в местах силового взаимодействия элементов деталей машин [1].

Анализ решений перечисленных задач показывает, что при математической безупречности результаты определения перемещений неадекватно отражают закономерности их изменения, известные из практики.

Например, согласно решению Митчела (предельный случай задачи для конуса, нагруженного на вершине сосредоточенной силой, направленной по его оси) радиальные перемещения точек дневной поверхности равны нулю, что противоречит измерениям твердости материалов сферическими инденторами и решению Буссинеска. Касательные перемещения этих же точек для полупространств Буссинеска и Митчела при значении коэффициента Пуассона  $\nu=0,3$  отличаются примерно в 1,3 раза.

Радиальные перемещения всех точек граничной грани пластинки единичной ширины, нагруженной распределенной нагрузкой  $w$  (Н/мм), постоянны, в том числе и для точек на бесконечном удалении от места приложения этой нагрузки, а касательные, нормальные к граничной грани и определяемые по формуле

$$v = \frac{2(1+\nu)w}{\pi E} \left[ \ln \frac{r}{h} + \frac{1}{2(1-\nu)} \right],$$

могут принимать различные значения при неизменном расстоянии  $r$  от места приложения нагрузки  $w$ , с изменением расстояния  $h$  от начала координат до точки, в которой предполагается  $u=0$ . При некоторых значениях отношения  $r/h$  изменяется знак перемещения  $v$ .

По-видимому, некорректно и предположение об абсолютной гладкости полупространства, из которого выделяется пластинка, так как поверхности реальных твердых тел неровны и могут быть нагруженными только сосредоточенными силами. Об этом свидетельствуют увеличенные фотографии площадки контакта образующей цилиндра с плоской поверхностью призмы [2].

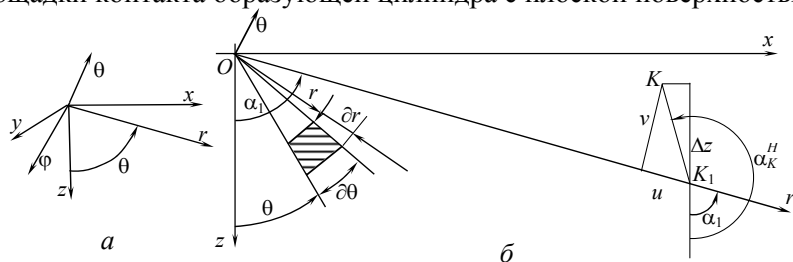


Рис. 1. Задача Митчела: а — система координат; б — перемещение точки К

Изложенное свидетельствует о том, что поиски альтернативных решений рассматриваемых задач являются актуальными.

Решение задачи Митчела (рис. 1, б).

Уравнения в перемещениях при заданных начальных условиях записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{K}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega \sin \theta) &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} - K \frac{\partial \omega}{\partial r} &= 0,\end{aligned}$$

и в последующем решаются введением функции  $\Phi = R(r)A(\theta)$ , что естественно, налагает дополнительную связь на соотношение между объемами расширением  $\varepsilon$  и компонентом вращения  $\omega_\varphi$ .

Выражения для объемного расширения и компонента вращения имеют вид

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta), \quad (1)$$

$$\omega = \omega_\varphi r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v - r \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — нормальные и касательные перемещения рассматриваемой точки,  $\omega_\varphi$  — компонент вращения относительно оси  $O_\varphi$ ,  $K = \frac{2G}{\lambda + 2G}$ , где  $\lambda$  и  $G$  — коэффициенты Ляме.

Приняв перемещения обратно пропорциональными  $r$ , их выражения и производные запишутся как

$$u = \frac{A_\theta}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{A_\theta}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}, \quad v = \frac{B_\theta}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{B_\theta}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}.$$

Здесь  $A_\theta$  и  $B_\theta$  — неизвестные функции угла  $\theta$ .

Подстановка перемещений и их производных в (1) и (2) позволяет переписать их в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{r^2} (A_\theta + X_\theta), \\ \omega &= \frac{1}{2r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = \frac{Y_\theta}{2r},\end{aligned}$$

в которых с целью понижения порядка обозначено

$$X_\theta = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + B_\theta \operatorname{ctg} \theta \quad \text{и} \quad Y_\theta = \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}.$$

После подстановки записанных выражений в исходные уравнения в перемещениях их можно переписать как

$$\begin{aligned}-\frac{2}{r^3} (A_\theta + X_\theta) + \frac{K}{2r^3} \left( \frac{\partial Y_\theta}{\partial \theta} + Y_\theta \operatorname{ctg} \theta \right) &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \left( Y_\theta + \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{K}{2r^2} Y_\theta &= 0.\end{aligned}$$

После сокращений, определения  $X_\theta$  из первого уравнения, его дифференцирования по  $\partial \theta$  и некоторых преобразований

$$\frac{\partial^2 Y_\theta}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial Y_\theta}{\partial \theta} + (1 - \operatorname{ctg}^2 \theta) Y_\theta = 0. \quad (3)$$

Полученное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами имеет решения  $Y_\theta = \pm A \sin \theta$ , в чем можно убедиться подстановкой переменной  $Y_\theta$  и ее производных.

Выбрав решение  $Y_\theta = -A \sin \theta$ , интегрированием определяется

$$A_\theta = +A \cos \theta + C_1. \quad (4)$$

Переменная  $X_\theta$  определяется интегрированием второго уравнения системы

$$X_\theta = -\left(1 + \frac{K}{2}\right) A \cos \theta + C_2.$$

После подстановки вместо  $X_\theta$  его выражения и повторного интегрирования

$$B_\theta \sin \theta = -\left(1 + \frac{K}{2}\right) A \cos \theta \sin \theta - C_2 \sin \theta + C_3,$$

где  $C_3 = C_2 - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{1}{2}$  определяется при  $\theta = 0$ .

Подстановка  $C_3$  в исходное выражение и некоторые преобразования приводят к зависимости

$$B_\theta = \left[ \frac{C_2}{1 + \cos \theta} - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{A}{2} \right] \sin \theta. \quad (5)$$

Выражения (5) и (4) содержат три неизвестные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ , и  $A$ , для определения которых имеется только два условия:  $\sigma_\theta = 0$  при  $\theta = \alpha_1$  (на поверхности конуса) и равновесия внешних и внутренних сил в проекциях на ось  $Oz$ .

Дополнительное условие для установления связи между постоянными  $C_1$  и  $C_2$  можно получить из зависимости между нормальными и касательными перемещениями (см. рисунок 1, б).

$$u = -v \frac{\cos(\alpha_1 + \gamma)}{\sin(\alpha_1 + \gamma)} \Rightarrow A_\theta = -B_\theta \frac{\cos(\alpha_1 + \gamma)}{\sin(\alpha_1 + \gamma)}.$$

Подстановка выражений (4) и (5) позволяет определить постоянную

$$C_2 = E_\alpha (AD_\alpha + C_1),$$

где выражения коэффициентов  $D_\alpha$  и  $E_\alpha$  будут записаны ниже.

Зависимость между постоянными  $C_1$  и  $A$  устанавливается из условия  $\sigma_\theta = 0$

$$\sigma_\theta = \lambda \varepsilon_{(\theta=\alpha_1)} + \frac{2G}{r} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{(\theta=\alpha_1)} + u_{(\theta=\alpha_1)} \right] = 0,$$

где  $\varepsilon_{(\theta=\alpha_1)} = \frac{A}{r^2} \left[ D_\alpha E_\alpha - \frac{K}{2} \cos \alpha_1 + C_1 (1 - E_\alpha) \right]$ ,

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{(\theta=\alpha_1)} = \left[ \frac{C_2}{1 + \cos \alpha_1} - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{A}{2} \cos \alpha_1 \right],$$

$$U_{(\theta=\alpha_1)} = \frac{1}{r} (A \cos \alpha_1 + C_1).$$

После подстановки записанных выражения в условие, сокращений и некоторых преобразований

$$C_1 = -AM_\alpha,$$

где  $M_\alpha$  — коэффициент, выражение которого будет записано ниже.

Постоянная  $A$  определяется из условия равновесия

$$F - 2 \int_0^{\alpha_1} \sigma_r \cos \theta dS = 0,$$

где  $\sigma_r = \lambda\varepsilon + 2G \frac{\partial u}{\partial r}$ .

Здесь  $\varepsilon = \frac{A}{r^2} \left[ D_\alpha E_\alpha - \frac{K}{2} \cos \alpha_1 + C_1(1 - E_\alpha) \right]$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} (M_\alpha - \cos \alpha_1)$

Площадь элементарной площадки, по которой действуют напряжения  $\sigma_r$ ,

$$dS = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

После подстановки в условие равновесия полученных выражений и  $dS$  определяется

$$A = \frac{(1+\nu) F}{4I_0 \pi E}.$$

Полученные выражения постоянных позволяют записать формулу для определения касательного перемещения точки  $K_1$  в виде

$$v_{K_1} = \frac{1+\nu}{2\pi\nu} \cdot R_1 Z_F Z_{K_\alpha}$$

где  $Z_{K_\alpha} = \frac{M_\alpha - \cos \alpha_1}{I_\alpha \cos \alpha_1}$ .

Здесь  $I_\alpha = N_\alpha \int_0^{\alpha_1} \cos \theta \sin \theta d\theta - \left( 1 + \frac{K}{2} \frac{\lambda}{2G} \right) \int_0^{\alpha_1} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$ .

После интегрирования и подстановки предел

$$I_\alpha = N_\alpha \frac{1 - \cos^2 \alpha_1}{2} - \left( 1 + \frac{K}{2} \frac{\lambda}{2G} \right) \frac{1 - \cos^3 \alpha_1}{3},$$

Постоянные коэффициенты, зависящие от угла при вершине конуса  $\alpha_1$ , определяются из выражений

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\nu \sin \alpha_1}{2} - \cos \alpha_1, \\ E_\alpha &= \frac{1 + \cos \alpha_1}{\nu \sin \alpha_1}, \\ M_\alpha &= \frac{\left( \frac{\lambda}{2G} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_1} \right) D_\alpha E_\alpha - \left( 1 + \frac{\lambda}{2G} \right) \frac{K}{2} \cos \alpha_1}{\left( 1 + \frac{\lambda}{2G} \right) - \left( \frac{\lambda}{2G} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_1} \right) E_\alpha}, \\ N_\alpha &= \frac{\lambda}{2G} D_\alpha E_\alpha + \left[ 1 + \frac{\lambda}{2G} (E_\alpha - 1) \right] M_\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

При  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

$$D_\alpha = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\nu}{2}, \quad E_\alpha = \frac{1}{\nu}, \quad M_\alpha = \frac{D_\alpha}{1 - E_\alpha}.$$

Здесь  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $K = \frac{2G}{\lambda + 2G}$ ,  $\frac{\lambda}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu}$ ,  $1 + \frac{\lambda}{2G} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$ ,  $\frac{K}{2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ .

Результаты определения выражений для радиальных и касательных перемещения представлены в таблице. Здесь приведены результаты решения задач Буссинеска и Митчела

## Результаты определения выражений нормальных и касательных перемещений

Обозначения перемещений	Наименование задач		
	Буссинеска	Митчела	Предлагаемое
$u$	$-0,52 \frac{F}{\pi r E}$	0	$0,165 \frac{F}{\pi r E}$
$v$	$0,91 \frac{F}{\pi r E}$	$0,78 \frac{F}{\pi r E}$	$0,551 \frac{F}{\pi r E}$

Предлагаемое решение можно использовать для определения перемещений точек полупространства, имеющего неровности (рис. 2).

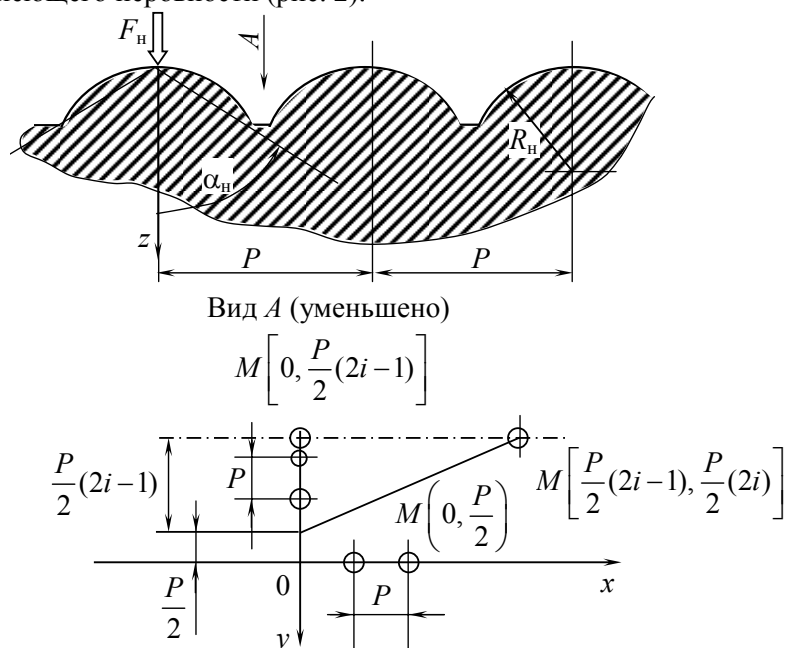


Рис. 2. Модель поверхности полупространства

Существующие методы определения площади контакта шероховатых поверхностей базируются на моделировании микронеровностей одним каким-либо видом геометрической фигуры (сфера, конус, эллипсоид и др.) [2].

Принимая в качестве исходной модели микронеровности сферический выступ с последующей его заменой конусным можно считать, что некоторая гипотетическая поверхность, имеющая выступы постоянного шага  $P/2$  и высотой  $H$ , взаимодействует с абсолютно гладкой поверхностью. В таком случае для определения перемещений точек единичного микровыступа (ЕМВ)  $v_M$  можно использовать выражение для касательных перемещений, полученное в задаче о действии силы, приложенной к вершине конуса и действующей вдоль его оси, которое удобно представить в виде

$$v_M = R_H \frac{1+\nu}{\pi \nu} Z_{FH} Z_P \quad (7)$$

где  $Z_P$  — параметр влияния сил  $F_H$  на перемещение исследуемой точки

$$Z_P = Z_{PO} + 2(Z_{PBji} + Z_{PHji}).$$

Для точки  $M(0; P/2)$  расположенной на окружности основания ЕМВ

$$Z_{PO} = \frac{M \alpha_{HO} - \sin D \alpha_{HO}}{2I_{\alpha_{HO}}^* (1 - \sin \Delta \alpha_{HO}) + \text{tg} \Delta \alpha_{HO}},$$

$$Z_{PH,Bji} = \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \frac{M\alpha_{Hi} - \sin D\alpha_{MHi}}{I_{\alpha_{Hi}}^* (1 - \sin \Delta\alpha_{Hi}) \sqrt{(-2i) + (1 \pm 2j)^2 + \operatorname{tg} \alpha_{HO}}}$$

где  $Z_{FH} = \frac{F_H}{E} \frac{(2R_H)^2}{E}$  — параметр нагрузки ЕМВ [3].

При вычислении  $Z_{PBji}$  и  $Z_{PHji}$  используются знаки “+” и “-”, соответственно;  $n_x$  и  $n_y$  — количество ЕМВ по направлению осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно.

Расчеты показали, что при  $n_x = n_y = 500$  и  $\Delta\alpha_H = 7^\circ$  (соответствует 6-му классу чистоты поверхностей), перемещение рассматриваемой точки, вызванное всеми силами системы, в 17,89 раза превышает ее перемещение от силы, приложенной на вершине ЕМВ.

Для более достоверной оценки перемещений точек полупространства, вызванных всеми приложенными силами, необходимо учитывать распределения ЕМВ по углу при вершине, высоте и шагу.

Следует подчеркнуть, что полученное решение задачи Митчела в отличие от анализируемых, адекватно отражает закономерности изменения перемещений точек полупространства, что позволяет определять размеры контакта и контактные напряжения; реализована попытка оценки перемещений точек полупространства при наличии неровностей, что позволяет определять размеры площадки контакта и напряжения в центре ЕМВ.

#### Литература

1. Биргер И.А. Расчеты на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, В.Ф. Шорр, Г.Б. Иоселевич. — 3-е изд. перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1979. — 702 с.
2. Площадь фактического контакта сопряженных поверхностей / Дьяченко П.Е., Толкачева Н.И., Андреев Г.А., Карпова Т.И. — М.: Изд. АН СССР, 1963. — 90 с.
3. Семенов Д.Л. Расчетные модели для оценки жесткости и прочности сферических и цилиндрических тел при их сжатии // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2003. — Вып. 2(20) — С. 41 — 47.

Поступила в редакцию 11 октября 2007 г.