УДК 621.391.1

Н.В. Захарченко, д-р техн. наук, проф.,
М.М. Гаджиев, канд. техн. наук,
Е.А. Осадчук, инженер,
Одес. нац. акад. связи им. А.С. Попова

СИНТЕЗ ТАЙМЕРНЫХ СИГНАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С РАЗДЕЛЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ СИНДРОМОВ ОБНАРУЖИВАЕМЫХ И ИСПРАВЛЯЕМЫХ ОШИБОК

М.В. Захарченко, М.М. Гаджієв, К.О. Осадчук. **Синтез таймерних сигнальних конструкцій з розділеними множинами синдромів, що виявляють та виправляють помилки.** Запропоновано алгоритм формування надлишкових таймерних сигналів з розділеними множинами синдромів для виявлення й виправлення помилок.

M.V. Zakharchenko, M.M. Gadzhyiev, E.O. Osadchuk. **Synthesis of timer alarm constructions with the parted sets of syndromes of retrieved and discovered mistakes.** The algorithm of formation of superfluous time signals with the divided sets of syndromes for detection and correction of mistakes is offered.

Для увеличения приема передаваемой кодовой комбинации необходимо исправлять возникшие ошибки, для этого используют избыточные коды, но есть коды, которые позволяют только обнаружить ошибки [1].

Для более точного устранения ошибок на приеме проведен синтез таймерных сигнальных конструкций с разделенными множествами сигналов обнаруживаемых и исправляемых ошибок.

Таймерные сигнальные конструкции представляют собой составной сигнал из нескольких отрезков длительностью $\tau_i \geq S\Delta$ при базовом элементе Δ, меньшем в несколько раз длительности найквистового элемента $\left(t_0 = \dfrac{1}{\Delta F}\right)$. Несмотря на то, что моменты модуляции расположены друг от друга на расстоянии τ_i, большем или равном найквистому, минимальное энергетическое расстояние в S раз меньше по сравнению с разрядно-цифровым кодированием $\left(\Delta = \dfrac{t_0}{S}\right)$, при котором моменты модуляции расположены в моментах времени, кратных t_0. На интервале $T_c = mt_0$ можно реализовать различные таймерные сигнальные конструкции с различным числом i значащих моментов модуляции (ЗММ) $i \in 1...m$. [2]

Число таких реализаций с заданным значением i

$$N_p = C^i_{mS-i(S-1)} = \frac{[mS - i(S-1)]!}{i![S(m-i)]!}. \qquad (1)$$

где i — среднее число ЗММ в кодовом слове,

m — длительность кодового слова в единичных элементах t_0.

Приведены числа реализаций сигнальных конструкций на интервале один байт $T_c = 8t_0$, т.е. при различном числе отрезков $\tau_i(i)$ для нескольких значений S (табл. 1).

Таблица 1

Количество реализаций сигнальных конструкций на интервале один байт

S	Число отрезков $\tau_i(i)$							
	1	2	3	4	5	6	7	8

2	15	91	286	495	462	210	36	1
4	29	325	1671	4845	6188	3003	330	1
4,5	32	418	2785	8769	13473	6025	598	1
5	36	496	3276	10626	15504	8008	792	1
10	71	1891	23426	135751	324632	230230	19448	1
11	78	2278	30856	270725	501942	376740	31824	1

Число реализаций на одном и том же интервале $T_0 = \mathrm{const}$ увеличивается с увеличением S и изменяется при изменении числа отрезков $\tau_i(i)$. Можно показать, что при заданных значениях i и S имеются значения m_0, при которых $N_{\text{р}}$ максимально. Так как количество информации, содержащейся в кодовом слове, определяется как $\log_2 N_{\text{р}}$, то необходимо выбирать оптимальное значение величины Δ, обеспечивающее максимум $N_{\text{р}}$.

Учитывая, что в качестве базового элемента сигнальной конструкции используется элемент $\Delta << t_0$, существенное влияние на качество приема оказывают смещения значащих моментов воспроизведения (ЗМВ), которые после регистрации равны целому значению отрезков Δ.

При регистрации в “средней точке” каждого отрезка Δ длительность отрезка τ_{ci} на приеме может измениться на величину $z_0\Delta$. Величина z_0 — целое число, которое определяет значение смещения $\Theta_{\text{см}}$ значащего момента воспроизведения в величинах Δ, $z_0 = \left\lceil \frac{\Theta_{\text{см}}}{\Delta} \right\rceil$.(2)

z_0	Зоны смещений ЗМВ
0	$0{,}5\Delta \geq \Theta_{\text{см}} > 0$
1	$1{,}5\Delta \geq \Theta_{\text{см}} > 0{,}5\Delta$
2	$2{,}5\Delta \geq \Theta_{\text{см}} > 1{,}5\Delta$
...	....

(2)

Из приведенного множества $N_{\text{р}}$ реализаций, имеющих заданное число ЗММ на интервале $T_{\text{с}}$ [3], можно выбрать конструкции, которые удовлетворяют условию

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = 0(\mathrm{mod}\, A_0), \quad (3)$$

где x_i — длительность i-го отрезка в значениях Δ;

A_i — коэффициенты, определяющие, обнаруживающие и исправляющие свойства множества, удовлетворяющего условию (3).

Установлена зависимость между требуемым кодовым расстоянием d в величинах Δ и коэффициентами A_i, обеспечивающими обнаружение ошибок отклонений в длительностях отрезков на приеме [2].

При d=3 и i=3 значения A_i равны: A_1=1, A_2=2, A_3=3, A_0=7.

Рассмотрим алгоритм отбора сигнальных конструкций $N_{\text{ру}}$, удовлетворяющих условию (3). При известных значениях i длительности отрезков каждой реализации из разрешенного множества чисел $N_{\text{р}}$ умножаются на соответствующие коэффициенты A_i с последующим делением суммы на коэффициент A_0 [1].

Предположим, что передаче подлежит 1 байт информации. Учитывая, что необходимо синтезировать 256 реализаций, удовлетворяющих условию (3) при коэффициентах A_i, соответствующих d=3, общее число реализаций таймерных сигналов с тремя ЗММ должно соответствовать неравенству $N_{\text{р}} \geq 256\cdot7$=1792. Такое количество реализаций при i=3 можно получить при $S = 4{,}5$ $(\Delta = 1:4{,}5 = 0{,}22z_0)$ (см. таблицу 1, ур-е (1)).

Равенство приема (3) обеспечивает обнаружение ошибки. С целью уменьшения потерь на повторения передачи информации необходимо синтезировать такой код, который бы исправлял часть ошибок, а менее вероятные только обнаруживал. Ясно, что такой алгоритм требует наличие двух неперекрывающихся множеств синдромов C_S (число): и для их исправления и для обнаружения ошибок в принятых сигнальных конструкциях. Проведен синтез таких множеств.

Рассмотрим эффективность исправлений длительностей отдельных отрезков величиной $z_0\Delta$ (z_0 — целое число отрезков Δ, на которое изменилась длительность отрезка τ_i, после регистрации).

Теорема 1.

Если коэффициенты равенства

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = 0(\mathrm{mod}\,A_0),$$

удовлетворяют условию

$$A_k = (2z_0+1)^{k-1},\ A_0 = (2z_0+1)^1,\ k \in 1\ldots(i-1) \tag{5}$$

то такой код исправляет изменения длительности одного или нескольких отрезков $k < i$ на величину z_0.

Предположим, что в сигнальной конструкции три информационных отрезка $(i = 3)$, в которых подряд передается не менее S единиц (нулей).

$$\tau_{ck} \geq S\Delta\,, \qquad k \in 1\ldots i\,.$$

Соответственно условию (4) коэффициентами равенства будут A_1=1, $A_2 = 2z_0 + 1$, $A_3 = (2z_0+1)^2$, $A_0 = (2z_0+1)^3$.

Учитывая, что для исправления длительности элемента τ_i сигнальной конструкции необходимо, чтобы каждому возможному исправляемому искажению z_0 соответствовал единственный синдром (число), для этого достаточно, чтобы $A_1 - A_2 \neq A_1$. В данном случае

$$A_2 = 2z_0 + 1\,.$$

Аналогично рассуждая, можно показать, что разница между A_3 и A_2, A_3 и ($A_2 + A_1$) не должна быть равной ни одному из коэффициентов A_2, A_1 или разности $A_2 - A_1$. Проверим это требование.

$$A_3 - A_2 = (2z_0+1)^2 - 2z_0 - 1 = 4z_0^2 + 4z_0 + 1 - 2z_0 - 1 = 4z_0^2 + 2z_0 > A_2\ (>A_1)\,;$$

$$A_3 - A_2 - A_1 = (2z_0+1)^2 - 2z_0 - 1 - 1 = 4z_0^2 + 4z_0 + 1 - 2z_0 - 2 = 4z_0^2 + 2z_0 - 1 > 2z + 1\,.$$

Из полученных результатов следует, что указанные условия выполняются. Учитывая условие (3), определим максимальное значение суммы

$$A_1\tilde{x}_1 + A_2\tilde{x}_2 + A_3\tilde{x}_3 = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3\,,$$

где $\tilde{x}_k = x_k + e_k$ — длина k-ого отрезка на приеме,

$\mathbf{E} \to e_1; e_2; e_3$ — вектор ошибки.

Максимальное значение суммы

$$S_{\max} = z_0(A_1 + A_2 + A_3) = z_0\sum_{i=1}^{3} A_i$$

Учитывая, что коэффициенты A_i представляют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$r = 2z_0 + 1\,,$$

максимальное количество членов равно [4]

$$\sum_{k=1}^{i} A_k z_0 = (4z_0^2 + 6z_0 + 1)z_0$$

$$A_0 = (2z_0 + 1)^3 = 8z_0^3 + 12z_0^2 + 6z_0 + 1$$

Из выражения (5) следует, что при всех значениях z_0 модуль сравнения $\bmod A_0$ является нечетным числом.

Для определений значений коэффициента A_0 и $\sum_{k=1}^{i} A_k z_0$ можно показать, что

$$\frac{A_0}{\sum_{k=1}^{i} x_k z_0} = 2 + \frac{4z_0 + 1}{4z_0^3 + 6z_0^2 + z_0}$$

Анализ показывает, что второе слагаемое намного меньше единицы и уменьшается с ростом z_0.

Необходимость превышения A_0 более чем в два раза $\sum_{k=1}^{i} x_k z_0$ объясняется тем, что синдромы, имеющие значения выше величины $\frac{A_0 - 1}{2}$, соответствуют векторам ошибок, для которых $\sum_{k=1}^{i} A_k e_k$ будет отрицательной. Заметим, что отрицательное значение e_k соответствует уменьшению длительности k-го отрезка на величину z_0.

Определим сколько всего различных векторов ошибок $\mathbf{E} \to e_1; e_2; e_3$ возможно при известном значении z_0.

Если z_0 соответствует максимальному числу отрезков Δ, на которое может измениться длина i-го отрезка, которая на приеме будет восстановлена, то число возможных вариантов различных отклонений равно $2z_0+1$, где единица учитывает вариант правильного приема i-го отрезка; коэффициент 2 — учитывает наличие как отрицательных, так и положительных отклонений длины отрезка.

Например, если $z_0 = 1$ за счет влияния помех, то первый переход сместится вправо на одно значение $\Delta(+1)$, второй — влево на одно значение $\Delta(-1)$, третий находится в “своей” зоне (0), то $\mathbf{E} \to +1; -1; 0$.

Следовательно, число возможных векторов ошибок, которым должны соответствовать неповторяющиеся синдромы при i отрезках длительностью τ_i

$$N_{\text{общ}} = (2z_0 + 1)^i .$$

При этом, если i=3, z_0=1, то согласно условию (4) коэффициенты A_k соответственно равны 1;3;9 и $A_0 = 27$. Вектору ошибки $\mathbf{E}_1 \to +1; +1; +1$ будет соответствовать синдром (1·1+1·3+1·9=13), а для вектора $\mathbf{E}_2 \to -1; -1; -1$ $\sum_{k=1}^{3} A_k e_k = -13$, что соответствует синдрому $C_S = A_0 - 13 = 14$.

Приведены все синдромы ошибок для i=3, $z_0 = 1$ (табл. 2).

Таблица 2

Значения синдромов определения ошибок для i=3, z_0=1.

Компонент вектора ошибок	Вектор $\mathbf{E}_k$																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
e_1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	—1	—1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
e_2	–1	–1	–1	0	0	0	1	1	1	–1	–1	–1	0	0	0	1	1	1	–1	–1	–1	0	0	0	1	1	1
e_3	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1	–1	0	1
$\sum_{k=1}^{i} A_k e_k$	–13	–4	5	–10	–1	8	–7	2	11	–12	–3	6	–9	0	9	–6	3	12	–11	–2	7	–8	1	10	–5	4	13
C_S	14	23	5	17	26	8	20	2	11	15	24	6	18	0	9	21	3	12	16	25	7	19	1	10	22	4	13

Все 27 вычетов по mod27 соответствуют 27 вариантам сочетания векторов ошибок искажения длины трех отрезков на величину $z_0 = \pm 1; 0$.

Следовательно, если какая-либо координата вектора ошибок будет искажена на величину, $1{,}5\Delta \le \Theta_{\text{см}} \le 2{,}5\Delta$, то значение синдрома ошибки будет соответствовать одному из вычетов по mod27. В этом случае ошибка будет исправлена неверно.

Для синтеза множества сигнальных конструкций, удовлетворяющих условию (3) и обеспечивающих синдромное исправление ошибок в соответствии на величину $z_0 = 1$ и обнаруживающих изменения длительностей на величину $|z_0| > 1$, необходимо достичь разделения множеств синдромов [4].

Назовем вектор ошибки, которая должна исправляться, вектором исправляющим $\mathbf{E}_{\text{и}}$, а другой — вектором обнаруживающим $\mathbf{E}_{\text{о}}$.

Для анализа алгоритма установления соответствия векторов ошибок, имеющего $z_0 = \pm 2$ одной или более координат, синдромам, соответствующим векторам ошибок с $z_0 = \pm 1$, определим вектора ошибок, не обнаруживаемых уравнением (3). Ошибка будет не обнаружена, если

$$A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = 0 \pmod{A_0}.$$

Из этого следует, что необнаруженными векторами ошибок будут "нулевые" вектора:

$$\mathbf{E}_{01} \to \pm 3; \mp 1; 0 \to 1 \cdot (\pm 3) + 1 \cdot (\mp 1) + 9 \cdot 0 = 0 \pmod{27};$$

$$\mathbf{E}_{02} \to 0; \pm 3; \mp 1 \to 1 \cdot (0) + 3 \cdot (\pm 3) + 9 \cdot (\mp 1) = 0 \pmod{27};$$

$$\mathbf{E}_{03} \to 0; 0; \pm 3 \to 1 \cdot (0) + 3 \cdot (0) + 9 \cdot (\pm 3) = 0 \pmod{27};$$

$$\mathbf{E}_{04} \to 0; \pm 3; 0 \to 1 \cdot (0) + 3 \cdot (\pm 9) + 9 \cdot (0) = 0 \pmod{27}.$$

Используя "нулевые" вектора можно по ненулевым синдромам определить вектора исправляемых ошибок $\mathbf{E}_{\text{и}}$ и ошибки, которые исправлять нецелесообразно. Учитывая равенство синдромов для исправляемых и обнаруживаемых ошибок можно записать [4]

$$\sum_{k=1}^{i} A_k e_{k\text{u}} - \sum_{k=1}^{i} A_k e_{k\text{об}} = \sum_{k=1}^{i} A_k e_{i\text{о}} . \tag{11}$$

Следовательно, вектору ошибки $\mathbf{E}_{\text{и}} \to 1; 0; 1$, для которого синдром $C_S = 10$, будет соответствовать вектор

$\mathbf{E}_{\text{о}} = \mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{\text{и}} \to [3; -1; 0] + [1; 0; 1] \to 4; -1; +1$ с тем же самым синдромом.

Определение видов векторов исправляемых ошибок можно оценить по значениям максимальной координаты нулевого вектора, определяемом как разность между значением максимальной координаты нулевого вектора и максимальной координаты вектора исправляемой ошибки. Например, при $\mathbf{E}_{\text{о}} \to \pm 3; \mp 1; 0$ и исправляемой i-кратной ошибки величиной $z_0 = \pm 1$

разница максимальных значений координат равна 2. Следовательно, вектора ошибок, имеющих минимум одну координату $|z_0| = 2$, будут иметь синдромы множества исправляемых ошибок, вследствие чего исправление будет неверным.

Для разделения множества исправляемых и обнаруживаемых ошибок с координатами $z_0 = \pm k$ необходимо, чтобы разница максимального значения координаты нулевого вектора и z_0 была больше двух, т.е. $\max e_i(\mathbf{E}_0) - |z_0| \geq 2$.

Так как множество коэффициентов A_1=1, A_2=3, A_3=9, A_0=27 не удовлетворяет этому условию, то все вектора ошибок с $z_0 \equiv 2$ будут исправляться неверно.

Рассмотрим следующий набор коэффициентов A_1=1, $A_2 = 4$, $A_3 = 17$, $A_0 = 45$. Так как указанные коэффициенты взаимно-простые, то „ненулевых" векторов с максимальным весом будет меньше

$$\mathbf{E}_{01} = \pm 4; \mp 1; 0,$$

$$\mathbf{E}_{02} = \pm 1; \pm 4; -1.$$

При исправлении векторов ошибок с $|z_0| \leq 1$ разность между величиной максимальной координаты вектора $\mathbf{E}_0$ и величиной максимальной координаты исправляемой ошибки равна 3.

Следовательно, все векторы ошибок с координатами $1 \leq |z_0| \leq 3$ имеют различные множества синдромов для исправляемых векторов ошибок, для которых $|z_0| \leq 1$, и обнаруживаемых, для которых $2 \leq |z_0| \leq 3$ [4].

Для оценки эффективности введения исправления части векторов ошибок с координатами $|z_0| \leq 1$ определим необходимое общее число реализаций $N_{\text{р}}$ (1) сигналов с тремя отрезками для передачи одного байта информации. Так как при обнаружении ошибок коэффициент $A_0 = 7$, то с учетом (3) число избыточных сигнальных конструкций, удовлетворяющих условию $\sum x_i A_i = 0(\bmod 7)$, должно быть 1792 $(2^8 \times 7)$.

Такое количество реализаций $N_{\text{р}}$ для $T_{\text{с}} = 8t_0$ и $i = 3$ возможно при $S = 4,5$ ($\Delta_1 = 1/4,5 = 0,22t_0$) (см. таблицу 1).

При исправлении ошибок для векторов с координатами $|z_0| \leq 1$ и обнаружении ошибок для векторов с координатами $|2| \leq z_0 \leq |3|$ и $A_0 = 45$ общее число реализаций должно быть не менее $2^8 \cdot 45 = 11520$.

Такое число реализаций можно получить при $i = 3$ на интервале $T_{\text{с}} = 7t_0$, $S = 9,5$. Если $T_{\text{с}} = 8t_0$, то величина базового элемента

$$\Delta = (1/9,5)8/7 = 0,12t_0.$$

За счет исправлений длин отдельных отрезков эквивалентного базового элемента [1]

$$\Delta_{\text{э}} = 0,12t_0 \cdot 3 = 0,36t_0.$$

Так как $\dfrac{\Delta_{\text{э}}}{\Delta} > 1,5$ (2), число повторно запрашиваемых ошибочно принятых сигнальных конструкций будет намного меньше, чем при использовании кода с обнаружения ошибок.

Синтез таймерных сигнальных конструкций с раздельными множествами синдромов обнаруживаемых и исправленных ошибок позволяет увеличить вероятность правильного приема передаваемой кодовой комбинации.

Литература

1. Захарченко М.В. Синтез багатопозиційних часових кодів. — К.: Техніка, 1999.— 340 с.
2. Антошевский В.С. К вопросу об эффективности систем передачи данных с контролем первичных параметров Антошевский В.С., Шпилевский Э.П. Вопр. радиоэлектроники. Теория Передачи Сигналов.— 1969.— Вып. 2. — С 34-35.
3. Амельник В.А. Методы нумерационного кодирования. — Новосибирск: Наука, 1986. — 40 с.
4. Бабкин В.Ф. Нумерация двоичных последовательностей с ограниченными длинами серий Бабкин В.Ф., Крюков А.Б. // Кодирование в слож. системах. — М.: Наука, 1974. — 12 с.

Поступила в редакцию 22 марта 2007 г.