УДК 621.391.1

В.Я. Чечельницкий, канд. техн. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРОРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ СОВЕРШЕННЫХ ДВОИЧНЫХ РЕШЕТОК ПОРЯДКА *N*=2^k

В.Я. Чечельницький. **Взаємозв'язок проріджених матриць досконалих двійкових решіток порядку *N*=2^k.** Приведено взаємозв'язок проріджених матриць квадратних досконалих двійкових решіток порядку *N*=2^k.

V.Ya. Chechelnisky **Perfect binary arrays order *N*=2^k thinned matrixes parental relation.** Presented is the parental relation between thinned matrixes of perfect binary arrays of the order *N*=2^k.

Достаточно часто возникает задача получить множество совершенных двоичных решеток (СДР) данного размера на основе одной. Для этого необходимо знать не только взаимосвязи СДР [1], но и взаимосвязи ее прореженных матриц.

Предлагается способ определения возможных взаимосвязей прореженных матриц СДР квадратной формы любого порядка $N = 2^k$, где k произвольное целое.

СДР может быть прорежена по пространственным координатам, в результате получаются четыре прореженные матрицы, которые ее составляют [1]. Во всех комбинациях прореженных матриц, из которых строятся СДР порядка $N = 2^k$, $k \geq 3$ [2], для $N = 4$ справедливо только первое выражение

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{A}(N/2)\,\mathbf{B}(N/2)\,\mathbf{C}(N/2)\,\mathbf{D}(N/2)\\
\mathbf{A}^0(N/2)\,\mathbf{E}^0(N/2)\,\mathbf{B}(N/2)\,\mathbf{D}(N/2)\\
\mathbf{A}^1(N/2)\,\mathbf{E}^1(N/2)\,\mathbf{C}(N/2)\,\mathbf{D}(N/2)\\
\mathbf{A}^2(N/2)\,\mathbf{E}^2(N/2)\,\mathbf{B}(N/2)\,\mathbf{C}(N/2)\\
\mathbf{A}^3(N/2)\,\mathbf{E}^3(N/2)\,\mathbf{B}(N/2)\,\mathbf{C}(N/2)\\
\mathbf{A}^4(N/2)\,\mathbf{E}^4(N/2)\,\mathbf{B}(N/2)\,\mathbf{D}(N/2)\\
\mathbf{A}^5(N/2)\,\mathbf{E}^5(N/2)\,\mathbf{C}(N/2)\,\mathbf{D}(N/2)
\end{array}\right\}. \tag{1}$$

Если СДР имеет размер $N \times N$, то, естественно, прореженные матрицы будут иметь размер $N/2 \times N/2$, что и указывается возле обозначения прореженной матрицы (1).

Для того, чтобы определить к какому типу из шестнадцати (1) принадлежит прореженная матрица, необходимо вычислить ее двумерную периодическую автокорреляционную функцию (ДПАКФ) $\mathbf{R}(N) = \left\| r_{m,n} \right\|$, элементы которой [1]

$$r_{m,n} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} h_{i,j} h_{i+m,j+n}\ , \tag{2}$$

где $h_{i,j} \in \{+1,-1\}$ — элементы исследуемой матрицы;

$i = \overline{0, N-1}$, $m = \overline{0, N-1}$ — номера строк матрицы;

$j = \overline{0, N-1}$, $n = \overline{0, N-1}$ — номера столбцов матрицы,

при этом значения $i+m$ и $j+n$ редуцируются по модулю *N*.

Исследования показали, что ДПАКФ всех прореженных матриц (1) имеет по 4 пика (табл. 1), размер которых равен $N^2/4$ [1], остальные элементы ДПАКФ имеют нулевое значение. Приведенная таблица справедлива для всех порядков СДР $N = 2^k, k \geq 3$. В квадратных скобках первое значение определяет номер строки, а второе значение определяет номер столбца.

У прореженных матриц $\mathbf{A}(N/2)$, $\mathbf{A}^0(N/2)$, $\mathbf{A}^1(N/2)$, $\mathbf{A}^2(N/2)$, $\mathbf{A}^3(N/2)$, $\mathbf{A}^4(N/2)$, $\mathbf{A}^5(N/2)$ все пики ДПАКФ положительные, а у матриц $\mathbf{B}(N/2)$, $\mathbf{C}(N/2)$, $\mathbf{D}(N/2)$, $\mathbf{E}^0(N/2)$, $\mathbf{E}^1(N/2)$, $\mathbf{E}^2(N/2)$, $\mathbf{E}^3(N/2)$, $\mathbf{E}^4(N/2)$, $\mathbf{E}^5(N/2)$ первые два пика ДПАКФ положительные, а вторые два пика отрицательные.

Таблица 1

Координаты пиков ДПАКФ прореженных матриц

Структура ДПАКФ	Номера пиков ДПАКФ			
	1	2	3	4
$\mathbf{A}(N/2)$	[0, 0]	$[0,\ N/2]$	$[N/2,0]$	$[N/2,N/2]$
$\mathbf{A}^0(N/2)$	[0, 0]	$[0,\ N/4]$	$[0,\ N/2]$	$[0,\ 3\cdot N/4]$
$\mathbf{A}^1(N/2)$	[0, 0]	$[N/4,0]$	$[N/2,0]$	$[3\cdot N/4,0]$
$\mathbf{A}^2(N/2)$	[0, 0]	$[N/4,N/4]$	$[N/2,N/2]$	$[3\cdot N/4,3\cdot N/4]$
$\mathbf{A}^3(N/2)$	[0, 0]	$[3\cdot N/4,N/4]$	$[N/2,N/2]$	$[N/4,3\cdot N/4]$
$\mathbf{A}^4(N/2)$	[0, 0]	$[0,\ N/2]$	$[N/2,N/4]$	$[N/2,3\cdot N/4]$
$\mathbf{A}^5(N/2)$	[0, 0]	$[N/2,0]$	$[N/4,N/2]$	$[3\cdot N/4,N/2]$
$\mathbf{B}(N/2)$	[0, 0]	$[N/2,0]$	$[0,\ N/2]$	$[N/2,N/2]$
$\mathbf{C}(N/2)$	[0, 0]	$[0,\ N/2]$	$[N/2,0]$	$[N/2,N/2]$
$\mathbf{D}(N/2)$	[0, 0]	$[N/2,N/2]$	$[0,\ N/2]$	$[N/2,0]$
$\mathbf{E}^0(N/2)$	[0, 0]	$[0,\ N/2]$	$[0,\ N/4]$	$[0,\ 3\cdot N/4]$
$\mathbf{E}^1(N/2)$	[0, 0]	$[N/2,0]$	$[N/4,0]$	$[3\cdot N/4,0]$
$\mathbf{E}^2(N/2)$	[0, 0]	$[N/2,N/2]$	$[N/4,N/4]$	$[3\cdot N/4,3\cdot N/4]$
$\mathbf{E}^3(N/2)$	[0, 0]	$[N/2,N/2]$	$[3\cdot N/4,N/4]$	$[N/4,3\cdot N/4]$
$\mathbf{E}^4(N/2)$	[0, 0]	$[0,\ N/2]$	$[N/2,N/4]$	$[N/2,3\cdot N/4]$
$\mathbf{E}^5(N/2)$	[0, 0]	$[N/2,0]$	$[N/4,N/2]$	$[3\cdot N/4,N/2]$

Исследования показали, что при построении прореженных матриц СДР используются операции транспонирования [3] и операции циклического сдвига по строкам $\mathbf{Y}(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{X}}(N/2)$ и столбцам $\mathbf{Y}(N/2)=\Downarrow\mathbf{X}(N/2)$.

Необходимо ввести понятия операций циклического сдвига по строкам и операций циклического сдвига по столбцам матрицы.

Операция циклического сдвига по строкам $\mathbf{Y}(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{X}}(N/2)$ выполняется следующим образом: i-тая строка матрицы $\mathbf{Y}(N/2)$ является i-тым циклическим сдвигом влево i-той строки матрицы $\mathbf{X}(N/2)$. Нумерация элементов матрицы начинается с нуля, поэтому первая строка матрицы $\mathbf{Y}(N/2)$ не изменяется и соответствует первой строке матрицы $\mathbf{X}(N/2)$, т.е. выполняется нулевой циклический сдвиг. Например,

$$\mathbf{X}(N/2)=\begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & + & + & - \\ + & + & + & - \\ + & + & + & - \end{bmatrix},\ \mathbf{Y}(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{X}}(N/2)=\begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & + & - & + \\ + & - & + & + \\ - & + & + & + \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее знаком “+” обозначен элемент прореженной матрицы СДР — “+1”, знаком “–” обозначен элемент прореженной матрицы СДР — “–1” для краткости.

Операция циклического сдвига по столбцам $\mathbf{Y}(N/2)=\Downarrow\mathbf{X}(N/2)$ выполняется следующим образом: i-тый столбец матрицы $\mathbf{Y}(N/2)$ является i-тым циклическим сдвигом вниз i-того столбца матрицы $\mathbf{X}(N/2)$. Например

$$\mathbf{X}(N/2)=\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix},\ \mathbf{Y}(N/2)=\Downarrow\mathbf{X}(N/2)=\begin{bmatrix} - & + & + & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{bmatrix}.$$

Для разных размеров СДР исследованиями установлена взаимосвязь прореженных матриц при выполнении операции транспонирования (табл. 2).

Таблица 2

Взаимосвязь прореженных матриц при выполнении операции транспонирования

$\mathbf{A}(N/2)=(\mathbf{A}(N/2))^T$	$\mathbf{A}^2(N/2)=(\mathbf{A}^3(N/2))^T$	$\mathbf{B}(N/2)=(\mathbf{C}(N/2))^T$	$\mathbf{E}^3(N/2)=(\mathbf{E}^2(N/2))^T$
$\mathbf{A}^1(N/2)=(\mathbf{A}^0(N/2))^T$	$\mathbf{A}^5(N/2)=(\mathbf{A}^4(N/2))^T$	$\mathbf{D}(N/2)=(\mathbf{D}(N/2))^T$	$\mathbf{E}^2(N/2)=(\mathbf{E}^3(N/2))^T$
$\mathbf{A}^0(N/2)=(\mathbf{A}^1(N/2))^T$	$\mathbf{A}^4(N/2)=(\mathbf{A}^5(N/2))^T$	$\mathbf{E}^1(N/2)=(\mathbf{E}^0(N/2))^T$	$\mathbf{E}^5(N/2)=(\mathbf{E}^4(N/2))^T$
$\mathbf{A}^3(N/2)=(\mathbf{A}^2(N/2))^T$	$\mathbf{C}(N/2)=(\mathbf{B}(N/2)^T$	$\mathbf{E}^0(N/2)=(\mathbf{E}^1(N/2))^T$	$\mathbf{E}^4(N/2)=(\mathbf{E}^5(N/2))^T$

При выполнении операции транспонирования (см. таблицу 1) некоторые прореженные матрицы не изменяются, например,

$$\mathbf{A}(4)=\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix},\ (\mathbf{A}(4))^T=\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix};\ \mathbf{D}(4)=\begin{bmatrix} + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ - & + & + & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix},\ (\mathbf{D}(4))^T=\begin{bmatrix} + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ - & + & + & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix};$$

или преобразуются в прореженную матрицу такого же типа, т.е. имеющую такую же ДПАКФ, но с другой структурой элементов, например,

$$\mathbf{A}(4)=\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \end{bmatrix},\ (\mathbf{A}(4))^T=\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ - & + & - & + \\ + & + & + & + \\ - & + & - & + \end{bmatrix};\ \mathbf{D}(4)=\begin{bmatrix} + & + & - & - \\ - & - & + & + \\ - & - & + & + \\ + & + & - & - \end{bmatrix},\ (\mathbf{D}(4))^T=\begin{bmatrix} + & - & - & + \\ + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ - & + & + & - \end{bmatrix}.$$

Исследованиями установлена взаимосвязь прореженных матриц СДР при выполнении указанной операции циклического сдвига по строкам (табл. 3).

Таблица 3

Взаимосвязь прореженных матриц при выполнении операции циклического сдвига по строкам

$\mathbf{A}(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{A}}(N/2)$	$\mathbf{A}^5(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{A}}{}^3(N/2)$	$\mathbf{C}(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{C}}(N/2)$	$\mathbf{E}^1(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{E}}{}^2(N/2)$
$\mathbf{A}^0(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{A}}{}^0(N/2)$	$\mathbf{A}^4(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{A}}{}^4(N/2)$	$\mathbf{B}(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{D}}(N/2)$	$\mathbf{E}^5(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{E}}{}^3(N/2)$
$\mathbf{A}^3(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{A}}{}^1(N/2)$	$\mathbf{A}^2(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{A}}{}^5(N/2)$	$\mathbf{E}^0(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{E}}{}^0(N/2)$	$\mathbf{E}^4(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{E}}{}^4(N/2)$
$\mathbf{A}^1(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{A}}{}^2(N/2)$	$\mathbf{D}(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{B}}(N/2)$	$\mathbf{E}^3(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{E}}{}^1(N/2)$	$\mathbf{E}^2(N/2)=\overset{\Leftarrow}{\mathbf{E}}{}^5(N/2)$

При операции циклического сдвига по строкам матрицы $\mathbf{A}(N/2)$, $\mathbf{A}^0(N/2)$, $\mathbf{A}^4(N/2)$, $\mathbf{C}(N/2)$, $\mathbf{E}^0(N/2)$ и $\mathbf{E}^4(N/2)$ преобразуются в прореженную матрицу такого же типа, т.е. имеющие такую же ДПАКФ.

Исследованиями установлена взаимосвязь прореженных матриц СДР при выполнении указанной операции циклического сдвига по столбцам (табл. 4).

Таблица 4

Взаимосвязь прореженных матриц при выполнении операции циклического сдвига по столбцам

$\mathbf{A}(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{A}(N/2)$	$\mathbf{A}^1(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{A}^3(N/2)$	$\mathbf{D}(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{C}(N/2)$	$\mathbf{E}^4(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{E}^2(N/2)$
$\mathbf{A}^2(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{A}^0(N/2)$	$\mathbf{A}^3(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{A}^4(N/2)$	$\mathbf{C}(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{D}(N/2)$	$\mathbf{E}^0(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{E}^3(N/2)$
$\mathbf{A}^1(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{A}^1(N/2)$	$\mathbf{A}^5(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{A}^5(N/2)$	$\mathbf{E}^2(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{E}^0(N/2)$	$\mathbf{E}^3(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{E}^4(N/2)$
$\mathbf{A}^4(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{A}^2(N/2)$	$\mathbf{B}(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{B}(N/2)$	$\mathbf{E}^1(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{E}^1(N/2)$	$\mathbf{E}^5(N/2) \Rightarrow\!\Downarrow \mathbf{E}^5(N/2)$

При операции циклического сдвига по столбцам матрицы $\mathbf{A}(N/2)$, $\mathbf{A}^1(N/2)$, $\mathbf{A}^5(N/2)$, $\mathbf{B}(N/2)$, $\mathbf{E}^1(N/2)$ и $\mathbf{E}^5(N/2)$ преобразуются в прореженную матрицу такого же типа, т.е. имеющие такую же ДПАКФ.

Таким образом, найдены преобразования прореженных матриц, которые получаются при выполнении операций транспонирования, циклического сдвига по строкам, циклического сдвига по столбцам и показана взаимосвязь прореженных матриц и при выполнении этих преобразований. Эти сведения имеют большое значение, т.к. могут использоваться при построении новых структур совершенных двоичных решеток.

Литература

1. Мазурков М.И. Классы эквивалентных и порождающих совершенных двоичных решеток для CDMA-технологий / Мазурков М.И., Чечельницкий В.Я. // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 2003.— № 5.— С. 54 — 63.
2. Чечельницкий В.Я. Метод построения полного класса совершенных двоичных решеток порядка N=8x8 // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 2005. — № 11. — С. 65 — 72.
3. Чечельницкий В.Я. Метод построения порождающего класса совершенных двоичных решеток порядка $N=2^k$ / Тр. Одес. политехн. ун-та. — 2006. —Спецвып.— С. 84 — 92.

Поступила в редакцию 13 марта 2007 г.