УДК 517.911

Т.А. Комлева, канд. физ.-мат. наук,
Л.И. Плотникова, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т,
А.В. Плотников, д-р физ.-мат. наук, проф., Одес. гос. акад. строительства и архитектуры

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.О. Комлєва, Л.І. Плотнікова, А.В. Плотніков. **Усереднення нечітких диференціальних рівнянь.** Доводиться можливість використання різних схем усереднення для диференціальних рівнянь з нечіткими початковими умовами.

T.A. Komleva, L.I. Plotnikova, A.V. Plotnikov. **Averaging of fuzzy differential equations.** The possibility of applying various schemes of averaging for fuzzy differential equations has been proved in the paper.

Во второй половине 20-го века в нелинейной механике и особенно в теории нелинейных колебаний широкое распространение получил метод усреднения, математическое обоснование которого началось с фундаментальной работы Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [1]. Значительную роль в разработке метода усреднения для все более широкого класса задач сыграли работы [2…5].

В это же время появилась теория нечетких множеств [6], а в конце 90-х годов из бурно развивающейся теории систем с неполной информацией [7…9] выделилась в отдельное направление теория нечетких дифференциальных уравнений [10, 11].

Рассмотрим возможность применения различных схем усреднения для нечетких дифференциальных уравнений.

Пусть $\mathrm{Conv}(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа, т.е.

$$h(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\right\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в R^n, $A, B\in\mathrm{Conv}(R^n)$.

Обозначим через E^n пространство, элементами которого являются отображения $u: R^n\to[0,1]$, удовлетворяющие следующим условиям:

— $u(\cdot)$ — модальное отображение, т. е. существует хотя бы одна точка $x_0\in R^n$, такая, что $u(x_0)=1$;

— $u(\cdot)$ — нечетко выпуклое;

— $u(\cdot)$ — полунепрерывное сверху;

— $[u]^0=cl\{x\in R^n \mid u(x)>0\}$ — компакт.

Для любого $\alpha\in(0,1]$ определим α-срезку отображения $u\in E^n$ следующим образом: $[u]^\alpha=\{x\in R^n \mid u(x)\ge\alpha\}$.

Лемма 1 [12]. *Если $u\in E^n$, то*

1) $[u]^\alpha\in\mathrm{Conv}(R^n)$ для всех $0\le\alpha\le1$;

2) $[u]^{\alpha_2}\subset[u]^{\alpha_1}$ для $0\le\alpha_1\le\alpha_2\le1$;

3) для любой сходящейся к некоторому $\alpha\in[0,1]$ возрастающей последовательности $\alpha_k\in[0,1]$ имеет место равенство $[u]^\alpha=\bigcap_{k\ge1}[u]^{\alpha_k}$.

Очевидно, что если $\{A^{\alpha} \mid 0 \le \alpha \le 1\}$ — семейство подмножеств из R^n, удовлетворяющее условиям 1….3, то существует $u \in E^n$, такое, что $[u]^{\alpha} = A^{\alpha}$ для $\alpha \in (0, 1]$ и $[u]^0 = \bigcup\limits_{0<\alpha\le 1} A^{\alpha} \subset A^0$.

Определим метрику в пространстве E^n следующим образом: $D(u,v) = \sup\limits_{0\le\alpha\le 1} h([u]^{\alpha},[v]^{\alpha})$.

Замечание 1. Известно, что [13]

1) (E^n, D) — полное метрическое пространство;

2) $D(u+w, v+w) = D(u,v)$ для всех $u,v,w \in E^n$;

3) $D(ku, kv) = |k| D(u,v)$ для всех $u,v \in E^n$, $k \in R$.

Замечание 2. Будем говорить, что отображение $g:[0, T] \to E^n$ измеримо (непрерывно, интегрируемо), если многозначное отображение $[g(t)]^{\alpha} : [0, T] \to \mathrm{Conv}(R^n)$ — измеримо (непрерывно, интегрируемо по Хукухаре) для всех $\alpha \in [0, 1]$.

Пусть $u, v \in E^n$. Если существует отображение $w \in E^n$ такое, что $[u]^{\alpha} = [v]^{\alpha} + [w]^{\alpha}$ для всех $\alpha \in [0, 1]$, то z будем называть H — разностью отображений u и v и обозначать $u - v$.

Определение. *Отображение $g:[0,T] \to E^n$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in [0,T]$, если существует такое отображение $g'(t_0) \in E^n$, для которого*

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\big(g(t_0+h) - g(t_0)\big) = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\big(g(t_0) - g(t_0-h)\big) = g'(t_0)$$

при условии, что H — разности $g(t_0+h) - g(t_0)$ и $g(t_0) - g(t_0-h)$ существуют для всех достаточно малых $h > 0$.

Рассмотрим следующее нечеткое дифференциальное уравнение:

$$u' = \varepsilon f(t,u),\ u(0) = u_0 \in E^n, \tag{1}$$

где $t \in R, u \in E^n, f: R\times E^n \to E^n, \varepsilon > 0$ — малый параметр. В работах [10, 11, 14…16] были получены различные условия существования решений для такого типа уравнений без малого параметра.

Системе (1) поставим в соответствие следующую усредненную систему:

$$\bar{u}' = \varepsilon \bar{f}(t,\bar{u}),\ \bar{u}(0) = u_0, \tag{2}$$

где $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int_0^T f(t,u)\,dt,\ \int_0^T \bar{f}(t,u)\,dt \right) = 0. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть в области $Q = \{(t,u) \mid t \ge 0, u \in U \subset E^n\}$ выполняются условия:*

1) отображение $f(t,u)$ измеримо по t при каждом фиксированном u и непрерывно по u при каждом фиксированном t;

2) существует суммируемая функция $M(t)$ и постоянная M_0, а также неубывающая функция $H(\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} H(\alpha) = 0$, такие, что для всех $t \ge 0$ и любых $u_1, u_2 \in U$ выполняются неравенства

$$D(f(t,u_1), f(t,u_2)) \le H(D(u_1,u_2))M(t),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M(t)\,dt \le M_0(t_2 - t_1)$$

на любом конечном промежутке $[t_1, t_2]$*;*

3) отображение $\overline{f}(t,u)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* $u \in U$ *и равномерно относительно* u *в области* U *существует предел (3);*

4) существует суммируемая функция $N(t)$ *и постоянная* N_0*, такие, что для почти всех* $t > 0$ *и всех* $u \in U$ $D(f(t,u),0) \le N(t)$, $D(\overline{f}(t,u),0) \le N(t)$, *и на любом конечном отрезке* $[t_1, t_2]$ *выполняется неравенство* $\int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt \le N_0(t_2 - t_1)$*;*

5) существует постоянная λ*, такая, что для любых* $u_1, u_2 \in U$

$$D(\overline{f}(t,u_1), \overline{f}(t,u_2)) \le \lambda D(u_1,u_2);$$

6) для всех $\varepsilon \in (0,\sigma]$ *и* $u_0 \in \operatorname{int} U$ *решение* $\overline{u}(t), t \ge 0,$ *системы (2) вместе с некоторой* ρ*-окрестностью лежит в области* U*.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0,\sigma]$*, что при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *на отрезке* $0 \le t \le L\varepsilon^{-1}$ *выполняется неравенство*

$$D(u(t), \overline{u}(t)) < \eta,$$

где $u(\cdot)$ *и* $\overline{u}(\cdot)$ *— решения систем (1) и (2), соответственно.*

Доказательство. Перейдем от систем (1) и (2) к соответствующим системам интегральных уравнений. Тогда из условия 5) теоремы следует неравенство

$$D(u(t), \overline{u}(t)) \le \varepsilon\lambda \int_0^t D\,(u(\tau), \overline{u}(\tau))\,d\tau + \varepsilon D\left(\int_0^t f(\tau,u(\tau))\,d\tau, \int_0^t \overline{f}(\tau,u(\tau))\,d\tau\right). \qquad (4)$$

На основании леммы Гронуолла-Беллмана неравенство (4) равносильно неравенству

$$D(u(t), \overline{u}(t)) \le \varepsilon \sup_{0 \le t \le L\varepsilon^{-1}} \left(\int_0^t f(\tau,u(\tau))\,d\tau, \int_0^t \overline{f}(\tau,u(\tau))\,d\tau\right) \exp(\lambda L).$$

Проведем разбиение отрезка $[0, L\varepsilon^{-1}]$ с шагом $\dfrac{L}{\varepsilon m}$, где m-натуральное число, и обозначим $t_i = \dfrac{iL}{\varepsilon m}$, $i = \overline{0,m}$, $u_i = u(t_i)$. На этом отрезке оценим выражение $\varepsilon D\left(\int_0^t f(\tau,u(\tau))\,d\tau, \int_0^t \overline{f}(\tau,u(\tau))\,d\tau\right)$.

Предположим, что для некоторого k, $0 \le k \le m-1$, $t \in (t_k, t_{k+1})$. Тогда

$$\varepsilon D\left(\int_0^t f(\tau,u(\tau))d\tau,\int_0^t \overline{f}(\tau,u(\tau))d\tau\right)\le\varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(D\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau,u(\tau))d\tau,\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau,u_i)d\tau\right)+\right.\right.$$
$$+D\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau,u_i)d\tau,\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(\tau,u_i)d\tau\right)+D\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(\tau,u_i)d\tau,\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{f}(\tau,u(\tau))d\tau\right)\Bigg)+$$
$$+D\left(\int_{t_k}^{t} f(\tau,u(\tau))d\tau,\int_{t_k}^{t} f(\tau,u_k)d\tau\right)+D\left(\int_{t_k}^{t} \overline{f}(\tau,u_k)d\tau,\int_{t_k}^{t} \overline{f}(\tau,u_k)d\tau\right)+ \tag{5}$$
$$+D\left(\int_{t_k}^{t} \overline{f}(\tau,u_k)d\tau,\int_{t_k}^{t} \overline{f}(\tau,u(\tau))d\tau\right)\le\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(\tau,u(\tau)),f(\tau,u_i)d\tau+$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} D(\overline{f}(\tau,u),\overline{f}(\tau,u(\tau))d\tau+D\left(\int_{0}^{t_{i+1}} f(\tau,u_i)d\tau,\int_{t}^{t_{i+1}} \overline{f}(\tau,u_i)d\tau\right)\right]+$$
$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}D\left(\int_0^{t_i} f(\tau,u_i)d\tau,\int_0^{t_i}\overline{f}(\tau,u_i)d\tau\right)+\varepsilon D\left(\int_0^{t} f(\tau,u_k)d\tau,\int_0^{t}\overline{f}(\tau,u_k)d\tau\right).$$

В силу условия 5 теоремы и оценки

$$D(u(t),u_i)\le\varepsilon\int_{t_i}^{t}D(f(t,u(\tau)),0)dx\le\varepsilon\int_{t_i}^{t}N(\tau)d\tau\le\varepsilon N_0(t-t_i)$$

получим

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}D(\overline{f}(\tau,u(\tau)),\overline{f}(\tau,u_i))d\tau\le\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\lambda\int_{t_i}^{t_{i+1}}D(u(\tau),u_i)d\tau\le\varepsilon^2\lambda N_0\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\tau-t_i)d\tau=\frac{\lambda N_0L^2}{2m}.$$

Далее, из условия 2 теоремы следует, что найдутся функция $M(t)$ и постоянная M_0, а также функция $H(\alpha)$ такие, что

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}D(\overline{f}(\tau,u(\tau)),\overline{f}(\tau,u_i))d\tau\le\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}H(D(u(\tau),u_i))M(\tau)d\tau\le H\left(\frac{LN_0}{m}\right)LM_0.$$

Обозначим через $\eta_1=\min(\rho,\eta)$. Тогда для $\eta_1/2>0$ можно указать такое число m=m_0, что равномерно относительно $\varepsilon\in(0,\sigma]$ выполняется неравенство

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}D(\overline{f}(\tau,u(\tau)),\overline{f}(\tau,u_i))d\tau+\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}D(f(\tau,u(\tau)),f(\tau,u_i))d\tau\le\frac{\eta_1}{2}\exp(-\lambda L).$$

Отметим, что m_0 выбирается из условия $\frac{\lambda N_0L^2}{2m}+LM_0H\left(\frac{LN_0}{m_0}\right)<\frac{\eta_1}{2}\exp(-\lambda L)$.

Зафиксируем m=m_0 и оценим оставшиеся в (5) слагаемые. В силу условия 3 теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\Phi(t)\to 0$ при $t\to\infty$, что для всех $u\in U$ справедливо

$$D\left(\int_0^t f(\tau,u)d\tau, \int_0^t \overline{f}(\tau,u)d\tau\right) < t\Phi(t).$$

Следовательно,

$$\varepsilon D\left(\int_0^{t_i} f(\tau,u_i)d\tau, \int_0^{t_i} \overline{f}(\tau,u_i)d\tau\right) < \varepsilon\, t_i\, \Phi(t_i) \le \sup_{\tau\in[0,L]} \tau\Phi(\tau) = \psi(\varepsilon),$$

$$\varepsilon D\left(\int_0^t f(\tau,u_k)d\tau, \int_0^t \overline{f}(\tau,u_k)d\tau\right) < \varepsilon t\Phi(t) \le \psi(\varepsilon),$$

где $\tau = \varepsilon t,\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon) = 0$ при фиксированном ранее $m = m_0$.

Таким образом,

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1} D\left(\int_0^{t_{i+1}} f(\tau,u_i)d\tau, \int_t^{t_{i+1}} \overline{f}(\tau,u_i)d\tau\right) + \varepsilon\sum_{i=0}^{m-1} D\left(\int_0^{t_i} f(\tau,u_i)d\tau, \int_0^{t_i} \overline{f}(\tau,u_i)d\tau\right) +$$

$$+\varepsilon D\left(\int_0^{t_{i+1}} f(\tau,u_k)d\tau, \int_0^{t} \overline{f}(\tau,u_k)d\tau\right) < 2m\psi(\varepsilon).$$

Итак, имеет место следующая оценка

$$\varepsilon D\left(\int_0^t f(\tau,u(\tau))d\tau, \int_0^t \overline{f}(\tau,u(\tau))d\tau\right) \le +LM_0H\left(\frac{LN_0}{m}\right) + 2m\psi(\varepsilon) \equiv a(\varepsilon,m).$$

Если ε_0 выбирать из условия $2m\psi(\varepsilon_0)\exp(\lambda L) \le \eta_1/2$, то получим утверждение теоремы при условии, что $\overline{u}(\cdot)$ на всем отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ не покидает область U. Покажем, что $u(\cdot)\in U$ на всем отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$. Действительно, т.к. $u^0 \in \operatorname{int} U$, то на некотором отрезке решение $u(\cdot)\in U$. Выберем ε_0 и m так, чтобы $a(\varepsilon_0, m) < \exp(-\lambda L)\min\{\rho/2, \eta/2\}$. Тогда на отрезке $[0, t^0]$, где $u(\cdot)\in U$, будем иметь

$$D(u(t), \overline{u}(t)) < \rho/2.$$

Если предположить, что $t_0 < L\varepsilon^{-1}$, то на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ в силу непрерывности решений $u(\cdot)$ и $\overline{u}(\cdot)$ найдется точка t', в которой будет выполняться неравенство

$$\rho/2 < D(u(t'), \overline{u}(t')) < \rho. \qquad (6)$$

Но отсюда следует, что при $t = t'$ решение не покинуло область U. Поэтому $t' \in [0, t^0]$ и тогда $D(u(t), \overline{u}(t)) < \rho/2$, что противоречит неравенству (6). Следовательно, $t^0 \ge L/\varepsilon$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Если условия 1, 3, 4, 6 теоремы оставить без изменений и потребовать, чтобы отображение $f(t,u)$ удовлетворяло условию 5, а отображение $\overline{f}(t,u)$ удовлетворяло условию 2 теоремы, то утверждение теоремы останется без изменений.

Следствие 1. Пусть

$$\overline{f}(t,u) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,u)dt \equiv f_0(u).$$

Тогда соотношение (3) справедливо, и теорема обосновывает схему полного усреднения.

Следствие 2. Пусть

$$f(t,u)=f_1(t,u)+f_2(t,u) \text{ и } \overline{f}(t,u)=f_1(t,u)+\overline{f}_2(u),$$

где $\overline{f}_2(u)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,u)\,dt$. Тогда соотношение (3) выполнено, и теорема обосновывает схему частичного усреднения.

Литература

1. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н — К/: Изд-во АН УССР, 1937. — 363 с.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
3. Митропольский Ю.А. Методы усреднения в нелинейной механике. — К.: Наук. думка, 1974. — 440 с.
4. Небеснов В.И. Математические методы исследования режимов работы судовых комплексов / — М.: Рекламинформбюро ММФ, 1977. — 350 с
5. Плотников В.А. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. — Одесса: Астропринт, 1999. — 354 с.
6. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inf. Control. — 1965. — Vol. 8. — P. 338 — 353.
7. Зубов В.И. Динамика управляемых систем. — М.: Высшая школа, 1982. — 285 с.
8. Никифоров В.О. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация и робастность / Никифоров В.О., Ушаков А.В.— СПб.: СПбГИМО(ТУ), 2003. — 200 с.
9. Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах / Поляк Б.Т., Граничин О.Н. — М.: Наука, 2003. — 292 с.
10. Kaleva O. Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — Vol. 24. — P. 301 — 317.
11. Seikkala S. On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — Vol. 24. — P. 319 — 330.
12. Negoita C.V. Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Wiley / Negoita C.V., Ralescu D.A. — New York, 1975. — p.
13. Puri M.L. Fuzzy random variables / Puri M.L., Ralescu D.A. // J. Math. Anal. Appl. — 1986. — Vol. 114 — P. 409 — 422.
14. Kaleva O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — Vol. 35. — P. 389 — 396.
15. Park J.Y. Fuzzy differential equations / Park J.Y., Han H.K. // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — Vol. 110. — P. 69 — 77.
16. Park J.Y. Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations / Park J.Y., Han H.K. // Internat. J. Math. & Math. Sci. — 1999. — Vol. 22, № 2. — P. 271 — 279.

Поступила в редакцию 22 февраля 2007 г.