

УДК 517.9:62-236.58

Ю.А. Клих, канд. физ.- мат. наук, проф.,
 Д.Э. Контрерас, канд. техн. наук, доц.,
 М.В. Ядрова, канд. техн. наук, доц.,
 Одес. нац. политехн. ун-т

ЭВОЛЮЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО ПЬЕЗОМАНИПУЛЯТОРА

Ю.О. Клих, Д.Е. Контрерас, М.В. Ядрова.
Эволюция математичної моделі п'єзоманіпулятора, що керується. Застосовуючи метод усереднення для рішення крайової задачі принципу максимуму з виконанням умов одночастотного методу Боголюбова-Митропольського отримано оптимальне управління п'єзоманіпулятором.

Yu.A. Klich, D.E. Kontreras, M.V. Yadrova.
Evolution of a mathematical model of a controlled piezomanipulator. Using the averaging method for the solution of the boundary problem of the maximal in terms of Bogolubov-Mitropolsky single frequency method the optimal control of the piezomanipulator is obtained.

Известна математическая модель системы управления пьезоманипулятором [1]. Задача исследования управления сведена к двухточечной краевой задаче принципа максимума.

Для исследования эволюции оптимального процесса асимптотическими методами преобразуем краевую задачу методом усреднения вдоль решения соответствующей порождающей краевой задачи [2, 3]. Продифференцировав функцию переключения

$$\chi = p_1 \sin \psi + \frac{p_2}{a} \cos \psi$$

и

$$\chi_1 = p_1 \cos \psi - \frac{p_2}{a} \sin \psi, \quad (1)$$

в силу системы(5) [1] и сопряженной ей, получим

$$\dot{\chi} - \omega \chi_1 = \varepsilon F_1, \quad \dot{\chi}_1 + \omega \chi = \varepsilon F_2, \quad (2)$$

где εF_1 и εF_2 — правые части сопряженной системы, не зависящие от управления.

Выполнив замену переменных

$$\chi = b \sin \vartheta, \quad \chi_1 = b \cos \vartheta, \quad \vartheta = \omega t - \alpha,$$

где b и α новые “сопряженные” переменные, система (2) приводится к стандартному виду метода усреднения интегро-дифференциальных уравнений с импульсным возмущением [4].

Управляемая система с импульсным воздействием принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{a} = \varepsilon \left[-\frac{q}{w} \sin vt \sin \psi + \frac{\gamma}{\omega} a^3 \sin \psi \cos^3 \psi - \omega \sin \psi \int_0^t R_1(t-s) a(s) \cos \psi(s) ds + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{\omega} \sin \psi \int_0^t R_3(t-s) a^3(s) \cos \psi(s) ds \right], \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\xi} = \omega - v + \varepsilon \left[-\frac{q}{\omega a} \sin vt \cos \psi + \frac{\gamma}{\omega} a^2 \cos^4 \psi - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{a} \cos \psi \int_0^t R_1(t-s) a(s) \cos \psi(s) ds + \frac{\gamma}{\omega a} \cos \psi \int_0^t R_3(t-s) a^3(s) \cos^3 \psi(s) ds \right], \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\begin{cases}
 \dot{b} = \varepsilon \left[\frac{\gamma}{\omega} a^2 b \sin^2 \psi \cos \vartheta - \frac{\gamma}{\omega} b \sin^2 \psi \cos \psi \cos \vartheta - \right. \\
 \left. - \frac{\omega}{a} b \cos \psi \sin \vartheta \int_0^t R_1(t-s) a(s) \sin \psi(s) ds + \omega b \sin \psi \sin \vartheta \int_0^t R_3(t-s) a^3(s) \sin \psi(s) \cos^2 \psi(s) ds, \right. \\
 \left. \dot{\alpha} = \varepsilon \left[-\frac{3\gamma}{\omega} a^2 b \cos^2 \psi \sin \vartheta - \frac{\gamma}{\omega} a^2 b \sin \psi \cos^3 \psi \cos \vartheta - \frac{\gamma}{\omega} a^2 b \sin \psi \cos^4 \psi \sin \vartheta + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\gamma}{\omega} b \cos^6 \psi \sin \vartheta + \gamma a^2 b \sin \psi \cos^3 \psi \cos \vartheta + \frac{\gamma}{\omega} a^2 b \sin^3 \psi \cos^3 \psi \cos \vartheta - \frac{\gamma}{\omega} b \sin \psi \cos^2 \psi \cos \vartheta - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{\omega}{a} b (\cos \psi - \sin \psi) \sin \psi \cos \psi \sin \vartheta \int_0^t R_1(t-s) a(s) \cos \psi(s) ds + \omega b \cos \psi \sin \vartheta \int_0^t R_1(t-s) \cos \psi(s) ds + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\omega}{a} b \sin \psi \cos \vartheta \int_0^t R_1(t-s) a(s) \cos \psi(s) ds + \frac{\omega}{a} b \sin \psi \sin \vartheta \int_0^t R_1(t-s) a(s) \sin \psi(s) ds \right], \right.
 \end{cases} \quad (5)$$

при $\tau \neq \tau_i(a)$, т.е. при $(a, \xi) \notin S$, где S — должна быть одинаково гладкая поверхность в “фазовом” пространстве $(a, \xi) \in M \subset R$, или при $(\Delta a, \Delta \xi)^T \Big|_{(a, \xi)} = g(a, \xi)$, где $g(a, \xi) = 0$ — уравнение поверхности S .

При $\tau = \tau_i(a)$, т.е. $(\Delta a, \Delta \xi)^T = I(a(\tau_i), b(\tau_i), \alpha(\tau_i))$,

где

$$\begin{aligned}
 I(a(\tau_i), b(\tau_i), \alpha(\tau_i)) = & \varepsilon (\omega^2 \sin \psi \sum_{i=1}^n \frac{L - a(\tau - \tau_i) \cos \psi(\tau - \tau_i)}{1 + \omega^2 a^2(\tau - \tau_i) \sin^2 \psi(\tau - \tau_i)} [2L - \\
 & - (1 + 2a(\tau - \tau_i)) \cos \psi(\tau - \tau_i) - \omega^2 (2L - a(\tau - \tau_i)) \sin^2 \psi(\tau - \tau_i)] a^2(\tau - \tau_i) l(\tau - \tau_i) + \\
 & + 2 \frac{\omega^2}{a} \cos \psi \sum_{i=1}^n (L - a(\tau - \tau_i)) \cos \psi(\tau - \tau_i) (1 - \omega^2 a(\tau - \tau_i) \cos \psi(\tau - \tau_i)) \times \\
 & \times \sin^2 \psi(\tau - \tau_i) a^2(\tau - \tau_i) l(\tau - \tau_i),
 \end{aligned} \quad (7)$$

управление пьезоманипулятором

$$\varepsilon u = \begin{cases} -1, & \text{если } b \sin v \tau \sin \vartheta < -\frac{\omega}{q}; \\ -\frac{q}{\omega} b \sin v \tau \sin \vartheta, & \text{если } -\frac{\omega}{q} \leq b \sin v \tau \sin \vartheta < \frac{\omega}{q}; \\ +1, & \text{если } b \sin v \tau \sin \vartheta \geq \frac{\omega}{q}. \end{cases} \quad (8)$$

Функция Понтрягина [1] в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned}
 H_\varepsilon = & -\varepsilon \omega^2 \sum_{i=1}^n \frac{[L - a(\tau - \tau_i) \cos \psi(\tau - \tau_i)]^2}{1 + \omega^2 a^2(\tau - \tau_i) \sin^2 \psi(\tau - \tau_i)} \sin^2 \psi(\tau - \tau_i) a^2(\tau - \tau_i) l(\tau - \tau_i) + \\
 & + (\omega - v) a b \cos(\psi - \vartheta) - \varepsilon \frac{q}{\omega} u b \sin v \tau \sin \vartheta + \frac{\gamma}{\omega} a^3 b \cos^v \psi \sin \vartheta - \\
 & - \varepsilon \omega b \sin \vartheta \int_0^t R_1(t-s) a(s) \cos \psi(s) ds + \varepsilon \frac{\gamma}{\omega} b \sin \vartheta \int_0^t R_3(t-s) a^3(s) \cos^3 \psi(s) ds.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Начальные условия

$$a_0 = \frac{\sqrt{\omega^2 y_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\omega y_0} = 1, \quad \xi_0 = -\arctg \frac{\dot{y}_0}{y_0}, \quad \text{при } y(0) \neq 0, \quad \dot{y}(0) = 0;$$

$$0 < \tau_i < \tau_{i+1}, i = \overline{1, n}, \quad b(\tau_i) = na_0; \quad \alpha(\tau_i) + \xi(\tau_i) = (\omega - \nu)\tau_i + \pi. \quad (10)$$

Граничные условия: $a(0) = a_0, \xi(0) = \xi_0$ краевой задаче принципа максимума (3)...(10) поставим в соответствие краевую задачу с усредненными уравнениями. Усреднение частичное, усредняются только слагаемые, пропорциональные малому параметру ε , не содержащие управление u ; члены уравнений (3)...(6), содержащие интегралы вида $\int_0^t R_1(t-s)a(s)\cos\psi(s)ds$, $k=1,3$, усредняются согласно модификации первой схемы усреднения [5], при этом усреднение проводится по явно входящему t .

Например, в выражении (5) после усреднения

$$\begin{aligned} \int_0^t R_1(t-s)a \cos \psi(s) ds &= \varepsilon A_1 \bar{a} \int_0^t \frac{e^{-\beta_1 x}}{x^{1-\alpha_1}} \cos(\psi - \nu x) dx = \\ &= \varepsilon A_1 \bar{a} \cos \psi \int_0^t \frac{e^{-\beta_1 x}}{x^{1-\alpha_1}} \cos \nu x dx = \varepsilon A_1 \bar{a} \sin \psi \int_0^t \frac{e^{-\beta_1 x}}{x^{1-\alpha_1}} \sin \nu x dx. \end{aligned}$$

Несобственные интегралы, входящие в последнее выражение, выражаются через элементарные функции [16] и гамма-функции $\Gamma(\alpha)$.

Тогда

$$\int_0^t R_1(t-s)a \cos \psi(s) ds = \varepsilon A_1 \bar{a} \cos \psi \frac{\Gamma(\alpha_1) \cos\left(\alpha_1 \arctg \frac{\nu}{\beta_1}\right)}{\sqrt{(\beta_1^2 + \nu^2)^{\alpha_1}}} + \varepsilon A_1 \bar{a} \sin \psi \frac{\Gamma(\alpha_1) \sin\left(\alpha_1 \arctg \frac{\nu}{\beta_1}\right)}{\sqrt{(\beta_1^2 + \nu^2)^{\alpha_1}}}.$$

В усредненной системе переменные обозначены теми же буквами с чертой над ними. Усредненная краевая задача принципа максимума принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= \varepsilon \frac{q}{2\omega} \bar{u} \cos \bar{\xi} - \varepsilon \frac{\omega}{2} A_1 \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\sqrt{(\beta_1^2 + \nu^2)^{\alpha_1}}} \sin\left(\alpha_1 \arctg \frac{\nu}{\beta_1}\right) \bar{a} - \\ &- \varepsilon \frac{3\gamma}{8\omega} A_3 \frac{\Gamma(\alpha_3)}{\sqrt{(\beta_3^2 + \nu^2)^{\alpha_3}}} \sin\left(\alpha_3 \arctg \frac{\nu}{\beta_3}\right) \bar{a}^3; \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\bar{\xi}} &= \omega - \nu + \varepsilon \frac{q}{2\omega a} \bar{u} \sin \bar{\xi} - \varepsilon \frac{\omega}{2} A_1 \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\sqrt{(\beta_1^2 + \nu^2)^{\alpha_1}}} \cos\left(\alpha_1 \arctg \frac{\nu}{\beta_1}\right) + \\ &+ \varepsilon \left[\frac{3}{8\omega} - \varepsilon \frac{3}{8} A_3 \frac{\Gamma(\alpha_3)}{\sqrt{(\beta_3^2 + \nu^2)^{\alpha_3}}} \cos\left(\alpha_3 \arctg \frac{\nu}{\beta_3}\right) \right] \bar{a}; \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\bar{b}} &= \varepsilon \frac{\omega}{4} \bar{b} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\sqrt{(\beta_1^2 + \nu^2)^{\alpha_1}}} \sin\left(\alpha_1 \arctg \frac{\nu}{\beta_1}\right) - \left[\varepsilon \frac{\gamma}{2\omega} - \varepsilon \frac{\gamma}{64\omega} A_3 \frac{\Gamma(\alpha_3)}{\sqrt{(\beta_3^2 + \nu^2)^{\alpha_3}}} \cos\left(\alpha_3 \arctg \frac{\nu}{\beta_3}\right) + \right. \\ &\left. + \varepsilon 9 \cos\left(\alpha_3 \arctg \frac{\nu}{\beta_3}\right) \right] \bar{a}^2 \bar{b}; \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\bar{\alpha}} &= \left[\varepsilon \frac{\gamma}{4\omega} - \varepsilon \frac{3\gamma}{16\omega} A_3 \frac{\Gamma(\alpha_3)}{\sqrt{(\beta_3^2 + \nu^2)^{\alpha_3}}} \right] \bar{a}^2 - \end{aligned} \right. \quad (14)$$

при $(\bar{a}, \bar{\xi}) \in S$, где

$$\bar{\varepsilon} \bar{u} = \begin{cases} -1, & \text{если } \sin vt \sin(\omega t - \bar{\alpha}) < -\frac{\omega}{qb}, \\ -\frac{qb}{\omega} \sin vt \sin(\omega t - \bar{\alpha}), & \text{если } -\frac{\omega}{qb} \leq \sin v \sin \vartheta < \frac{\omega}{qb}, \\ +1, & \text{если } b \sin vt \sin(\omega t - \bar{\alpha}) \geq \frac{\omega}{qb}. \end{cases} \quad (15)$$

При $(\bar{a}, \bar{\xi}) \notin S$, т.е. в точках τ_i , управлением является $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{ir})$.

Конечный момент $\frac{T}{\varepsilon}$ и τ_i не фиксированы, поэтому функция Гамильтона

$$\begin{aligned} \overline{H\varepsilon} = & \frac{\omega - v}{\varepsilon} ab \cos[(\omega - v)t + (\bar{\xi} + \bar{\alpha})] - \frac{q}{\omega} \bar{b} (\cos \bar{\alpha} - \sin \bar{\alpha}) \bar{u} + \frac{\gamma}{4\omega} \sin[(\omega - v)t - (3\bar{\xi} + \bar{\alpha})] + \\ & + \frac{4\gamma}{3\omega} \sin[(\omega - v)t + (\bar{\xi} + \bar{\alpha})] - \frac{\omega \Gamma(\alpha_1) \cos\left(\alpha_1 \arctg \frac{\gamma}{\beta_1}\right)}{2\sqrt{(\beta_1^2 + v^2)^{\alpha_1}}} ab (\sin[(\omega - v)t - (3\bar{\xi} + \bar{\alpha})] + \\ & + \cos[(\omega - v)t - (\bar{\xi} + \bar{\alpha})]) + \frac{\gamma A_3 \Gamma(\alpha_3)}{16\omega} \left(\frac{\sin\left[(\omega - v)t - \left(\alpha_3 \arctg \frac{v}{\beta_3}\right)\right]}{\sqrt{(\beta_3^2 + v^2)^{\alpha_3}}} + \frac{\sin\left[(\omega - 3v)t - \left(\alpha_3 \arctg \frac{v}{\beta_3}\right)\right]}{\sqrt{(\beta_3^2 + 9v^2)^{\alpha_3}}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

обращается в нуль в любой момент $t \in \left(0, \frac{T}{\varepsilon}\right)$, а значит и в любой момент $\tau \in (0, T)$, в том числе

при $\tau_i \in (0, T), i = \overline{1, n}$.

Векторы $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{ir})$ являются управляющими воздействиями и принимают значения в множествах $U \in R^m$ и $W \subset R^r$ соответственно. Причем U — произвольное множество из R^m , а W — произвольное выпуклое множество из R^r .

Решая усредненную краевую задачу (11)...(16) сведением к задаче Коши, например, методом “стрельбы”, необходимо с требуемой точностью найти недостающие начальные значения a_0 и b_0 , минимизируя невязку $S(a_0, b_0)$, а моменты времени τ_i из равенства нулю $\overline{H\varepsilon}$ (16).

Решение усредненной краевой задачи (11)...(16) существенно упрощает численное решение исходной задачи оптимального управления.

Эффективность асимптотического метода решения задачи иллюстрируется конкретным примером.

Биморфная пластинка ЦТС-19 выполнена из пьезокерамического материала цирконат-титанат свинца (см. таблицу)

Численные значения параметров ЦТС-19

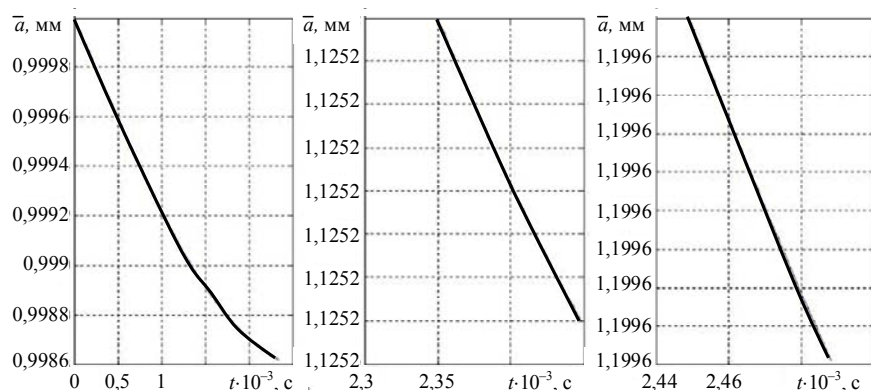
k	$G_k, \text{Н/м}^3$	$\varepsilon A_k, 1/\text{мин}$	$\beta_k, \text{Н/м}^3$	α_k				
1	$12,3 \cdot 10^{10}$	3,14	$1,34 \cdot 10^{-3}$	0,25				
3	$3,90 \cdot 10^{10}$	1,65	$2,5 \cdot 10^{-3}$	0,75				
$\rho, \text{кг/м}^3$	$L, \text{м}$	$d, \text{м}$	$h, \text{м}$	$U_n, \text{В}$	$v, \text{рад./с}$	$\omega, \text{рад./с}$	γ	εq
$7,45 \cdot 10^{-3}$	$70 \cdot 10^{-3}$	$12 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	300	615	234	$229 \cdot 10^{-10}$	$0,36 \cdot 10^{-3}$

Для сингулярных ядер релаксации выполняются условия:

$$\frac{dR_k(\tau)}{d\tau} < 0, \quad \int_0^{\infty} R_k(\tau) d\tau = 1, \quad R_k(t-s) = \varepsilon A_k \frac{e^{-\beta_k(t-s)}}{(t-s)^{1-\alpha_k}}, \quad k=1,3.$$

Приведены графики решений в резонансном случае системы с заданными начальными условиями (см. рисунок).

$$a_0 = \frac{\sqrt{\omega^2 y_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\omega y_0} = 1, \quad \xi_0 = -\operatorname{arctg} \frac{\dot{y}_0}{\omega y_0} = 0, \quad \text{т.к. } y_0 \neq 0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$



Зависимость амплитуды \bar{a} от “медленного” времени $\tau = \Sigma t = 10^{-3} t$: $a - \tau_1 = 2,3499 \cdot 10^{-3}$ с,
 $\bar{a}(\tau_1) = 0,9986$ мм; $b - \tau_2 = 2,4492 \cdot 10^{-3}$ с, $\bar{a}(\tau_2) = 1,1252$ мм; $v - \tau_3 = 2,4891 \cdot 10^{-3}$ с,
 $\bar{a}(\tau_3) = 1,1196$ мм

Таким образом, задача сведена к нахождению недостающих начальных условий “сопряженных” переменных $\bar{b}(\tau_i), \bar{\alpha}(\tau_i)$ на каждом отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$, т.е. к решению n задач.

В силу того, что конечный момент времени T и моменты $\tau_i, i = \overline{1, n}$, являются нефиксированными, они определяются равенством нулю $\bar{H}_\varepsilon(T)$ и $\bar{H}_\varepsilon(\tau_i)$ в указанные моменты, а $\bar{b}(\tau_i), \bar{\alpha}(\tau_i)$ определяются минимизацией невязки в моменты T и τ_i .

В силу [7] обоснованием асимптотической оптимальности получаемого таким образом решения поставленной задачи служит выполнение условий теоремы о непрерывной зависимости решения краевой задачи принципа максимума.

Литература

1. Клик Ю.А. Математическая модель системы управления пьезоманипулятором / Клик Ю.А., Контрерас Д.Э., Ядрова М.В. // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2006. — Вып. 2(26). — С.146 — 150.
2. Клик Ю.А. Усреднение вдоль решения порождающей краевой задачи в задачах оптимального управления // III респ. конф. “Функционал.-дифференц. уравнения и их приложения”: Тез. докл. — Пермь: Ред.-издат. отдел Перм. ун-та, 1988. — С. 172.
3. Клик Ю.А. Методы усреднения в краевых задачах принципа максимума // Тр. VIII междунар. конф. по нелинейным колебаниям. — Прага, 1978. — Т. 2. — С. 913 — 919.
4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. — К: Вища шк. Голов. изд-во, 1987. — 288с.
5. Митропольский Ю.А. Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений / Митропольский Ю.А., Филатов А.Н. — К.: Наук. думка, 1992. — С. 30 — 48.
6. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Рыжик И.М., Градштейн И.С. — К.: Наук. думка, 1992. — С. 112 — 114.

7. Клих Ю.А. Непрерывная зависимость решения краевой задачи принципа максимума при усреднении вдоль решения „порождающей” краевой задачи // Сучас. проблеми математики. Матеріали міжнар. наук. конф. Ч.1. — Чернівці, К., 1998. — С. 257 — 260.

Поступила в редакцию 12 июля 2006 г.