УДК 519.852

С.И. Козовый, канд. техн. наук, доц., Одес. нац. политехн. ун-т,
В.Н. Любота, канд. физ.-мат. наук, доц., Одес. нац. ун-т им. И.Н. Мечникова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЗНАЧЕНИЯМИ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ

С.І. Козовий, В.М. Любота. **Розв'язування задач лінійного програмування зі змінними значеннями вільних членів.** Запропоновано швидке розв'язування задач лінійного програмування зі змінним значенням вільних членів у випадках, коли номери обмежень, які перетворюються в нуль, залишаються постійними. Такий підхід може бути застосовано, зокрема, при знаходженні максимального прибутку підприємства, коли на склад через невеликі проміжки часу надходять нові порції сировини, необхідної для виготовлення основної продукції.

S.I. Kozovy, V.M. Lyubota. **Solution of linear programming problems with a varying column of free terms.** Prompt solution of linear programming problems with a varying column of free terms is proposed for the cases when the numbers of constraints reducing to zero stay constant. Such an approach can be applied, in particular, in finding the maximum profit of an enterprise, when new portion of raw materials necessary for manufacturing bulk products are admitted to a storehouse within short time intervals.

Многие задачи линейного программирования требуют постоянного пересчета при условии, что меняются только значения свободных членов, например, при максимизации прибыли предприятия, где на склад поступают с небольшим интервалом новые порции различных видов сырья, необходимого для производства основной продукции. Учитывая, что задача может иметь достаточно большую размерность, желательно получить возможность контролировать изменение максимальной прибыли, не решая каждый раз задачу симплексным методом [1] из-за больших временных затрат.

В основу предлагаемого метода положено следующее.

Пусть задача линейного программирования имеет вид

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le k_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le k_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le k_m,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0,\ n \le m,$$

где x_j ($j = \overline{1, n}$) — кол-во продукции p_j, запланированной к производству;

k_i ($i = \overline{1, m}$) — кол-во ресурса s_i, находящегося на складе;

a_{ij} — число единиц ресурса s_i, затрачиваемого на изготовление единицы продукции p_j;

c_j — прибыль от реализации единицы продукции p_j.

С использованием симплексного метода, находится оптимальное решение задачи для конкретного набора значений свободных членов k_i. Полученное решение не менее n ограничений из данных m обращает в нуль. Фиксируется базис и соответствующие этому базису ограничения.

Если в дальнейшем количество поступающего сырья пропорционально количеству находящегося на складе, то пересчет оптимальных решений тривиален. Но этот, исключительный случай практически не встречается.

Если кол-во поступившего сырья не пропорционально уже имеющемуся, но такие, что номера ограничений, обращающихся в нуль, остаются постоянными, то, привязавшись к уже фиксированным базисным ограничениям, можно получить формулы для “мгновенного” решения задачи. При этом не будет необходимости снова применять симплексный метод.

Рассмотрим схему получения таких формул при решении задачи

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max ,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le k_1,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \le k_2,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \le k_3,$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \le k_4,$$

$$3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \le k_5,$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_4 \le 0 .$$

Процедура решения симплексным методом на компьютере в системе Maple [3] для произвольно взятых значений $k_1 = 11$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$, $k_4 = 6$, $k_5 = 1$ выглядит следующим образом

> $with\ (simplex)$;
> l: $2*x1 + x2 - x3 - x4$;
> c_1: $x1 + x2 - x3 + x4 - 11 <= 0$;
> c_2: $2*x1 - x2 - x3 - x4 - 4 <= 0$;
> c_3: $- x1 + 2*x2 + x3 - x4 - 5 <= 0$;
> c_4: $- x1 - x2 + 2*x3 + x4 - 6 <= 0$;
> c_5: $3*x1 + x2 - 3*x3 - 2*x4 - 1 <= 0$;
> $maximize\ (l, \{c1, c2, c3, c4, c5\}, nonnegative)$;
> $\left\{ x1 = \frac{148}{15},\ x3 = \frac{127}{15},\ x4 = \frac{64}{15},\ x2 = \frac{16}{3} \right\}$.

Легко видеть, что в нуль обращаются ограничения c_1, c_3, c_4, c_5.

По условию при всех других значениях свободных членов ограничения, обращающиеся в нуль, будут теми же, а левая часть второго ограничения должна быть неотрицательна, т.е.

$$c_{10}\text{: } x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - k_1 = 0;$$

$$c_{30}\text{: } - x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - k_3 = 0;$$

$$c_{40}\text{: } - x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - k_4 = 0;$$

$$c_{50}\text{: } 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - k_5 = 0;$$

$$c_{20}\text{: } 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - k_2 \le 0;$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_4 \le 0 .$$

Из уравнений c_{10}, c_{30}, c_{40} и c_{50} находятся значения x_1, x_2, x_3, и x_4 методом исключений в системе Maple, обеспечивающей символьное преобразование. Операция подстановки осуществляется оператором “SUBS”. Символ “>” определяет строку.

Исключение переменных проводится по алгоритму:

Шаг 1. Из ограничения c_{10} находится $x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + k_1$ и подставляется его в левые части остальных ограничений.

С использованием оператора SUBS получено

$$> \mathrm{subs}(x1 = -x2 + x3 - x4 + k1,\ c30(x1,\ x2,\ x3,\ x4));$$
$$3x2 - k1 - k3.$$
$$> \mathrm{subs}(x1 = -x2 + x3 - x4 + k1,\ c40(x1,\ x2,\ x3,\ x4));$$
$$x3 + 2x4 - k1 - k4.$$
$$> \mathrm{subs}(x1 = -x2 + x3 - x4 + k1,\ c50(x1,\ x2,\ x3,\ x4));$$
$$-2x2 - 5x4 + 3k1 - k5.$$
$$> \mathrm{subs}(x1 = -x2 + x3 - x4 + k1,\ c20(x1,\ x2,\ x3,\ x4));$$
$$-3x2 + x3 - 3x4 + 2k1 - k2.$$

Тогда система ограничений примет вид

$$c_{10} : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - k_1 = 0,$$
$$c_{31} : 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - k_1 - k_3 = 0,$$
$$c_{41} : 0x_2 + x_3 + 2x_4 - k_1 - k_4 = 0,$$
$$c_{51} : -2x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 3k_1 - k_5 = 0,$$
$$c_{21} : -3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2k_1 - k_2 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_4 \le 0 .$$

Здесь в символах вида c_{ij} i показывает номер ограничения, а j (если $j \ne 0$) — номер очередной исключенной переменной.

Если $j = 0$, то в ограничении переменные не исключались.

Шаг 2. Из ограничения c_{31} находится $x_2 = \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3}$ и подставляется в левые части c_{41}, c_{51}, c_{21}, т.е.

$$> \mathrm{subs}(x2 = (1/3) * k1 + (1/3) * k2,\ c41(\ x2,\ x3,\ x4));$$
$$x3 + 2x4 - k1 - k4.$$
$$> \mathrm{subs}(x2 = (1/3) * k1 + (1/3) * k2,\ c51(\ x2,\ x3,\ x4));$$
$$-5x4 + \frac{7}{3}k1 - \frac{2}{3}k2 - k5.$$
$$> \mathrm{subs}(x2 = (1/3) * k1 + (1/3) * k2,\ c21(\ x2,\ x3,\ x4));$$
$$x3 - 3x4 + k1 - 2k2.$$

Система ограничений примет вид

$$c_{10} : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - k_1 = 0,$$
$$c_{31} : 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - k_1 - k_3 = 0,$$
$$c_{42} : x_3 + 2x_4 - k_1 - k_4 = 0,$$
$$c_{52} : 0x_3 - 5x_4 + \frac{7}{3}k_1 - \frac{2}{3}k_2 - k_5 = 0,$$
$$c_{22} : x_3 - 3x_4 + k_1 - 2k_2 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_4 \le 0 .$$

Шаг 3. Из ограничения c_{42} находится $x_3 = -2x_4 + k_1 + k_4$ и подставляется его в левые части ограничений c_{52} и c_{22}, т.е.

$$> \mathrm{subs}(x3=-2*x4+k1+k4,\ c52(x3,\ x4));$$

$$-5x4+\frac{7}{3}k1-\frac{2}{3}k2-k5.$$

$$> \mathrm{subs}(x3=-2*x4+k1+k4,\ c22(x3,\ x4));$$

$$-5x4+2k1-2k2+k4\le 0.$$

Система ограничений примет вид

$$c_{10}: x_1+x_2-x_3+x_4-k_1=0,$$

$$c_{31}: 3x_2+0x_3+0x_4-k_1-k_3=0,$$

$$c_{42}: x_3+2x_4-k_1-k_4=0,$$

$$c_{53}: -5x_4+\frac{7}{3}k_1-\frac{2}{3}k_3-k_5=0,$$

$$c_{23}: -5x_4+2k_1-2k_2+k_4\le 0,$$

$$x_1\ge 0,\ldots,x_4\le 0\,.$$

Шаг 4. Из ограничения c_{53} находится $x_4=\frac{7}{15}k_1-\frac{2}{15}k_3-\frac{1}{5}k_5$ и подставляется его в левую часть c_{23}, т.е.

$$> \mathrm{subs}(x4=(7/15)*k1-(2/15)*k3-(1/5)*k5,\ c23(\ x4));$$

$$-\frac{k1}{3}-2k2+\frac{2}{3}k3+k4+k5.$$

Таким образом, ограничение на коэффициенты $k_j\ \ (j=\overline{1,m})$, при которых задача будет иметь оптимальное решение, имеет вид

$$-\frac{k_1}{3}-2k_2+\frac{2}{3}k_3+k_4+k_5\le 0. \qquad (1)$$

Из ограничений c_{53}, c_{42}, c_{31} и c_{10} последовательно определяются оптимальные значения x_4, x_3, x_2, x_1 для любого набора $k_i\ \ (i=\overline{1,m})$, удовлетворяющего условию (1).

Значения свободных членов, оптимальные значения переменных и значения функции f

Значения свободных членов					Оптимальные значения				Значения функции f
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	x_1	x_2	x_3	x_4	
11	4	5	6	1	9,8667	5,3333	8,4667	4,2667	12,3333
19	9	8	10	3	17,4000	9,0000	14,8000	7,2000	22,0000
27	14	11	14	5	24,9333	12,6667	20,7333	10,1333	31,6670
35	19	14	18	7	32,4667	16,3333	26,8667	13,0667	41,3333
43	24	17	22	9	40,0000	20,0000	33,0000	16,0000	51,0000
51	29	20	26	11	47,5333	23,6667	39,1333	18,9333	60,6667
59	34	23	30	13	55,0667	27,3333	45,2667	21,8667	70,3333
67	39	26	34	15	62,6000	31,0000	51,4000	24,7000	80,0000
83	49	32	42	19	77,6667	38,3333	63,6667	30,6667	99,3333
93	56	37	46	25	88,2667	43,3333	72,0667	33,4667	114,3330
98	62	40	48	30	94,8000	46,0000	77,2000	34,4000	124,0000
110	70	50	56	40	112,2667	53,3333	92,6667	36,6667	149,3330
120	78	58	58	44	120,2667	59,3333	99,0667	39,4667	161,3330
122	82	65	70	50	136,8687	62,3333	115,4667	38,2667	182,3330
125	88	76	72	56	144,0000	67,0000	123,0000	37,0000	195,0000

Приведенные результаты оптимальных решений задач линейного программирования по полученным формулам для различных значений свободных членов, удовлетворяющих условию (1), показали их совпадение с решениями, полученными симплексным методом (см. таблицу).

Следовательно, оптимальные решения можно находить по приведенным формулам практически мгновенно, не прибегая к громоздким методам оптимизации.

Литература

1. Банди Б. Методи оптимизации. — М.: Радио и связь, 1988. — 128 с.
2. Любота В.Н. Челночный алгоритм решения задач математического программирования / Любота В.Н., Козовый С.И. // Тр. Одес. нац. политехн. ун-та — Одесса, 2001. — Вып. 2(14). — С. 166 — 170.
3. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: Maple 8. — М.: СОЛОН-Прес, 2003. — 456 с.

Поступила в редакцию 11 января 2007 г.