УДК 621.52

В.Я. Копп, д-р техн. наук, проф.,
А.А. Скидан, канд. техн. наук, доц., ????
А.И. Балакин, инженер,
О.В. Филипович, канд. техн. наук, доц.,
Севаст. нац. техн. ун-т

АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ПРИ ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ В МАШИНО- И ПРИБОРОСТРОЕНИИ

В.Я. Копп, О.А. Скидан, О.І. Балакін, О.В. Філіпович. **Аналіз диференціальної ентропії при технічних вимірюваннях у машино- і приладобудуванні.** На основі доведеної теореми про максимум диференціальної ентропії випадкової величини, обмеженої кінцевими межами, при заданих їй математичному очікуванні й дисперсії, отримано оцінку мінімально необхідної кількості повторних вимірювань, що забезпечують необхідну точність.

V.Ya. Kopp, O.A. Skidan, O.I. Balakin, O.V. Filipovich. **The analysis differential enthropia at technical measurements in machine- and device making.** On the basis of the proved theorem of a maximum differential enthropia of a random variable limited by final limits, given its population mean and dispersion, the estimation of minimally necessary number of the repeated measurements providing required accuracy is obtained.

Повышение точности измерительных приборных систем является необходимым компонентом улучшения качества продукции.

При оценке точностных свойств измерительных приборов из паспортных данных известно значение предельной погрешности ($\pm\beta$) во всем диапазоне измерения. При этом необходимо учитывать, что в пределах допустимых значений измеряемой величины точность средств измерений должна изменяться. Так в области середины поля допуска она может быть меньше, а по мере приближения к границам должна увеличиваться, чтобы уменьшить вероятность выхода за эти границы воспроизводимой величины. Вследствие того, что прибор имеет погрешность, то при его показаниях, соответствующих предельным или близким к ним значениям измеряемой величины, ограниченной допуском, нельзя достоверно утверждать, что воспроизводимая величина находится в пределах этого допуска. Поэтому, чтобы получить достоверную информацию о том, что измеряемая величина находится в допустимых пределах, необходимо уменьшить поле допуска этой величины на значение удвоенной предельной погрешности прибора. Однако это значительно сужает область допустимых значений, что усложняет в целом технологический процесс. Указанный недостаток можно устранить, повысив точность результата измерения за счет увеличения числа повторных измерений. Конечно, сама предельная погрешность средств измерения не меняется, и речь идет об изменении дисперсии погрешности результата измерения, которая уменьшается при увеличении количества повторных измерений в n раз, где n — число повторных измерений. Однако, увеличение числа n ведет к увеличению времени измерений, что снижает производительность выпуска продукции. Поэтому число измерений, а значит и объем снимаемой информации, должен быть минимально необходимым для обеспечения требуемой точности измерений.

Отметим следующее обстоятельство. Как известно, погрешность измерения можно свести к аддитивной даже при наличии мультипликативной составляющей, если речь идет об измерении в конкретной точке, и представить воспроизводящую величину z как сумму воспроизводимой величины u и некоторой помехи ξ

$$z = u + \xi \ ,$$

полагая, что помеха не зависит от z [1].

В этом случае условная дифференциальная энтропия случайной величины z равна безусловной энтропии помехи ξ, что позволяет получить граничную оценку необходимого числа измерений [2], которая вычисляется на основе максимума дифференциальной энтропии случайной величины, которой является погрешность прибора. Результатом такого анализа является вид плотности распределения случайной величины, позволяющий получить граничную оценку необходимого числа измерений. Если этого не делать, то необходимо определять плотность распределения суммы случайных величин, что, во-первых требует дополнительной априорной информации (вида плотности распределения погрешности прибора); во-вторых является довольно сложной операцией, связанной с определением сверток n-го порядка; в-третьих точность получаемого результата невелика ввиду априорных погрешностей исходных данных.

Число измерений зависит от значения измеряемой величины, находящейся в пределах поля допуска. Во всех случаях поле допуска следует снизить на величину δ, которая намного меньше допустимой погрешности прибора: $\delta \ll 2\beta$.

Величина δ и вероятность выхода результата измерения за границу поля допуска $P_д$ задаются разработчиком, исходя из вида и устойчивости технологического процесса и метрологических характеристик средств измерения. По заданным δ и $P_д$ определяется требуемое значение верности ε^2, что осуществляется с использованием метода последовательных приближений следующим образом. Задается ε^2 и решается рассматриваемая задача определения вида плотности распределения случайной величины, которой является погрешность прибора. Вид плотности распределения выбирается из условия обеспечения максимума дифференциальной энтропии случайной величины, дисперсия которой равна ε^2. Далее по найденной плотности $p(x)$ определяется вероятность выхода результата измерения за границу поля допуска и сравнивается с заданным значением $P_д$. Если оно больше $P_д$, то ε^2 уменьшается, и вновь решается указанная задача. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено поставленное условие. После того, как ε^2 найдено, определяется число повторных измерений как

$$n = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

где σ^2 — дисперсия средства измерений.

Рассмотрим метод определения плотности распределения $p(x)$, который базируется на теореме о максимуме дифференциальной энтропии случайной величины, ограниченной конечными пределами, при заданных ее математическом ожидании и дисперсии.

Теорема. Если случайная величина ограничена конечными пределами $[a, b]$, то при заданных ее математическом ожидании $m_з$ и дисперсии ε^2 максимальную дифференциальную энтропию обеспечивает усеченный нормальный закон распределения этой случайной величины, полученный из неусеченного, математическое ожидание m и среднеквадратическое отклонение σ которого определяются из выражений как

$$m_з = m + \frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right]; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = \sigma^2 \left\{1 + \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[(a-m)\, e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b-m)\, e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right]\right\} + \\ +2m\frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right] + m^2 + m_з^2, \end{aligned} \tag{2}$$

а максимальное значение дифференциальной энтропии:

$$H_{\text{диф. max}} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[(a+m)\ e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b+m)\ e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right]\right\} +$$

$$+\frac{m^2}{\sigma^2} - \frac{m\ m_з}{\sigma^2} - \ln\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Для доказательства теоремы определим вид плотности распределения рассматриваемой случайной величины, доставляющей максимум функционалу

$$\max_{p(x)} \to \left\{H_{диф}(x) = -\int_a^b p(x)\cdot\ln p(x)\ dx\right\}, \tag{3}$$

при следующих ограничениях:

$$\int_a^b p(x)dx = 1\,; \tag{4}$$

$$\int_a^b xp(x)dx = m_x\ ; \tag{5}$$

$$\int_a^b (x-m_x)^2\, p(x)dx = \varepsilon^2\,. \tag{6}$$

Рассматриваемая задача является вариационной задачей с закрепленными концами и интегральными (изопериметрическими) ограничениями. Составляя уравнение Эйлера для функционала (3) при ограничениях (4), (5), (6), получим

$$-\ln p(x) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x = 0\,.$$

Из него находим вид плотности распределения $p(x)$

$$p(x) = e^{\lambda_2\cdot x^2+\lambda_3\cdot x+\lambda_1-1} = e^{\lambda_1-1}\cdot e^{\lambda_2\cdot x^2+\lambda_3\cdot x} = e^{\lambda_1-1}\cdot e^{-\frac{\lambda_3^2}{2\lambda_2}}\cdot e^{\lambda_2\left(x+\frac{\lambda_3}{2\lambda_2}\right)^2}\,.$$

Проведя замену переменных

$$\frac{\lambda_3}{2\lambda_2} = k = -m\,;\ \lambda_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}\,;\ e^{\lambda_1-1}\cdot e^{-\frac{\lambda_3^2}{2\lambda_2}} = M\ ,$$

получим выражения для плотности и функции распределения в следующем виде:

$$p(x) = M\ \ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ ; \tag{7}$$

$$F(x) = M\int_a^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx\,. \tag{8}$$

Тогда в соответствии с интегралом Эйлера-Пуассона и с учетом усечения нормального закона, имеем

$$M = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,, \tag{9}$$

где

$$C = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx} \tag{10}$$

Подставляя (9) в (7), (8), получим

$$p(x) = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ ; \tag{11}$$

$$F(x)=\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx .$$

Таким образом, доказано, что имеем усеченный нормальный закон, а его математическое ожидание m_x и дисперсия D_x на основании (11) определяются из следующих выражений:

$$m_x=\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b x\ \ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=m+\frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$D_x=\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b (x-m_x)^2\ \ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2\left\{1+\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[(a-m)\ \ e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}}-(b-m)\ \ e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right]\right\}+$$

$$+2m\frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right]+m^2+m_x^2.$$

При подстановке в данные выражения $m_x=m_з$, $D_x=\varepsilon^2$, получаем формулы (1), (2), что и требовалось доказать.

Подставляя полученные выражения для $p(x)$ в формулу дифференциальной энтропии после интегрирования, получим ее максимальное значение

$$H_{\text{диф. max}}=-\int_a^b\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ln\left[\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[(a+m)\ \ e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}}-(b+m)\ \ e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}\right]\right\}+\frac{m^2}{\sigma^2}-\frac{m\ m_з}{\sigma^2}-\ln\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Следствие.

В частном случае, если центрированная случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание, ограничена пределами [$-a$, a], то при заданной ее дисперсии ε^2 максимальную дифференциальную энтропию обеспечивает усеченный нормальный закон распределения этой случайной величины, полученный из неусеченного, среднеквадратическое отклонение σ которого определяется из выражения

$$\varepsilon^2=\sigma^2\left[1-\frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right], \tag{12}$$

а максимальное значение дифференциальной энтропии равно

$$H_{\text{диф.max.}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right]-\ln\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} .$$

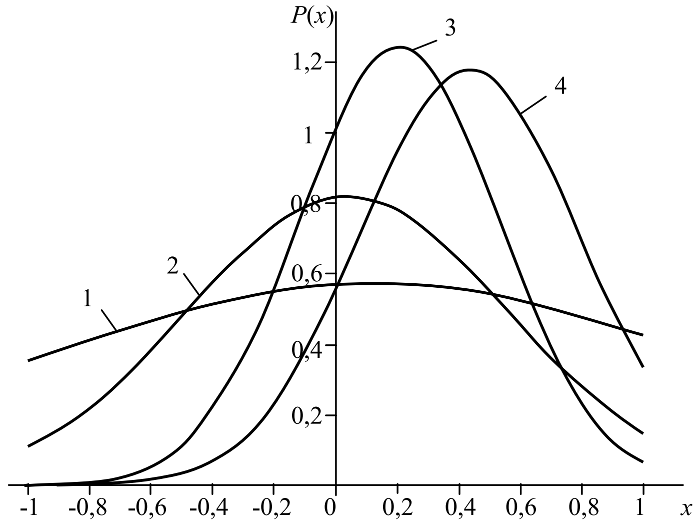
С учетом (10) выражение (12) примет вид

$$\varepsilon^2=\sigma^2\left[1-\frac{2a}{\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right]. \tag{13}$$

Выражения (1), (2) лежат в основе алгоритма вычисления параметров m и σ для нецентрированной случайной величины, ограниченной конечными пределами. Сам алгоритм представляет собой двумерный поиск и не вызывает сложностей.

В случае центрированной случайной величины, ограниченной конечными пределами, алгоритм основан на выражении (13) и представляет собой одномерный поиск.

Моделирование производилось на основе приведенной теоремы для нецентрированных случайных величин с использованием выражений (1), (2) и (10). Результаты вычислений для случайных величин лежащих в пределах [–1, 1], показаны на рисунке 1, где кривая 1: ε^2=0,3, $m_з = 0,03$; кривая 2: ε^2=0,2, $m_з = 0,03$; кривая 3: ε^2=0,1, $m_з = 0,2$; кривая 4: ε^2=0,1, $m_з = 0,4$. Параметры соответствующих этим кривым неусеченных нормальных законов: кривая 1: σ^2=1,271, $m = 0,127$; кривая 2: σ^2=0,2675, $m = 0,04$; кривая 3: σ^2=0,1054, $m = 0,2067$; кривая 4: σ^2=0,1251, $m = 0,4354$.



Зависимости плотностей распределений, обеспечивающих максимальную дифференциальную энтропию случайных величин, ограниченных конечными пределами, от заданных математических ожиданий и дисперсий

Как видно из расчетных данных при значительных дисперсиях (кривые 1, 2) значения m, σ значительно разнятся от ε^2, $m_з$. Соответственно для кривых 3, 4 (случаи малых дисперсий) эти различия невелики.

Предложенный метод позволяет выбрать минимальное число повторных измерений, удовлетворяющее требуемому условию точности.

Литература

1. Копп В.Я. Анализ информационно-точностных свойств измерительных приборов вариационным методом / В.Я. Копп, А.А. Скидан, А.В. Цуканов // Оптимизация произв. процессов: Сб. научн. тр.— Севастополь: Изд-во СевНТУ. 2002. — № 5. — С. 9 — 17.
2. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. — М.: Высш. шк., 1989. — 320 с.

Поступила в редакцию 27 февраля 2007 г.