

УДК 532.517

А.А. Буров, канд. техн. наук,
В.Я. Гамоліч, математик,
Е.В. Осипенко, инженер,
Одес. нац. политехн. ун-т

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ СТРУЙ В СИСТЕМЕ “ИСТОЧНИК – СТОК”

О.О. Буров, В.Я. Гамоліч, Є.В. Осипенко.
Математична модель течії замкнених струмин у системі “джерело – сток”. Методом конформних відображень круглої вільної струмини отримано основні характеристики замкненої струмини при течії біля апарату збору з периферійною видачею очищеного потоку.

A.A. Burov, V.Ya. Gamolich, E.V. Osipenko.
Mathematical model of closed jets current at the system “source - drain”. The basic characteristics of the closed flowing hearly of collecting device with cleared flow peripheral delivery were obtained by the methods of circular free jet’s conformous representation.

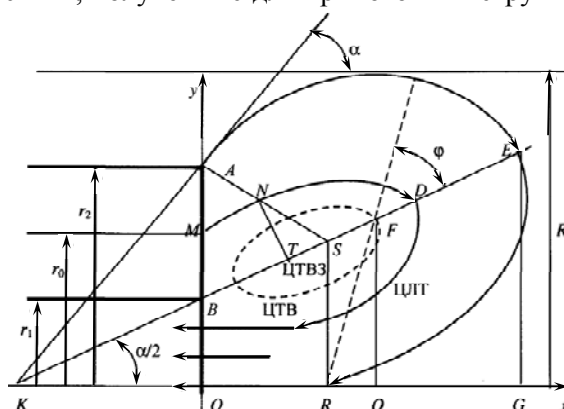
Одним из основных элементов замкнутых систем очистки является собирающий аппарат. Он должен выполнять две функции — сбор загрязненного газа, выходящего из источника загрязнения (захват пылевых частиц), и возврат к этому источнику очищенного газа, который содержит остаточную концентрацию твердых частиц, а поэтому должен быть вторично захвачен и вновь отправлен на очистку. Очевидно, что кинематическая структура течения газовых струй вблизи аппарата имеет решающее влияние на эффективность захвата. Если она известна, т.е. построена математическая модель течения, то представляется возможным проследить за траекториями твердых частиц, а значит разработать обоснованные рекомендации по проектированию аппарата.

С гидродинамической точки зрения такое течение можно рассматривать как взаимодействие двух источников (стационарного источника загрязнения и очищенного потока) и одного стока.

В случае, если скорость газа, выходящего от стационарного источника загрязнения, невелика, то с целью упрощения выкладок ее влиянием на гидродинамику процесса в первом приближении можно пренебречь. Тогда отличительной особенностью рассматриваемого течения является равенство расходов источника, в качестве которого рассматривается поток очищенного газа, и стока — струи, подаваемой на очистку. Взаимодействие струи с окружающим пространством и возможными препятствиями в нем зависит от ее дальности и ширины (диаметра).

Математическую модель замкнутой кольцевой струи (см. рисунок) можно построить, используя известные аэродинамические характеристики, полученные для прямооточных струй с круглым соплом [1, 2].

Если принять эквидистантность линий тока между свободной поверхностью струи и областью центральной тороидальной вихревой зоны (ЦТВЗ) вблизи устья, то можно допустить существование общей нормали у траекторий, соединяющих каналы источника и стока. Эта нормаль представлена отрезком AN . Кинематическое содержание такого допущения заключается в том, что скорости всех точек отрезка AN имеют направление вращения вокруг общего центра S , что интерпретируется как центр вихря внутри ЦТВЗ. В хорошо изученной прямооточной струе с круглым устьем



Замкнутое течение вблизи аппарата с периферийной выдачей очищенного потока

максимальную скорость имеют точки на центральной траектории, совпадающей с осью потока. Аналогом такой траектории в кольцевой струе является выпуклая дуга, обозначенная аббревиатурой ЦЛТ (центральная линия тока).

Аналитическое представление ЦЛТ можно получить, аппроксимируя ее дугой эллипса, один из фокусов которого расположен в точке T . Параметр эллипса равняется длине отрезка NT . Считая началом ЦЛТ точку $M(0, r_0)$, найдем

$$AN = (r_2 - r_0) \cos \alpha.$$

Углы треугольника ABS при вершинах B и S равны $\pi/2 - \alpha/2$. Поэтому

$$AS = AB = r_2 - r_1, \quad NS = r_2 - r_1 - (r_2 - r_0) \cos \alpha.$$

В прямоугольном треугольнике NST имеем

$$NT = NS \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = NS \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, рассчитываемый параметр эллипса ЦЛТ равняется длине отрезка NT , т.е.

$$P_0 = (r_2 - r_1 - (r_2 - r_0) \cos \alpha) \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Чтобы найти эксцентриситет эллипса ЦЛТ, примем скорость точки N равной максимальной скорости прямоочной струи с круглым соплом с дальностью L_0 , определяемой длиной дуги между точками N и D . Тогда значение эксцентриситета e будет корнем уравнения

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = L_0, \quad (2)$$

где $\rho(\varphi) = \frac{P_0}{1 + e \cos \varphi}$.

Преобразовав уравнение (2), запишем

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{1 + e^2 \sin^2 \varphi}}{1 + e \cos \varphi} d\varphi = \frac{L_0}{P_0}. \quad (3)$$

Вычисляя интеграл (3) по формуле Симпсона для трех узлов, с учетом (1) получим уравнение для e

$$\frac{1}{1 - e} + \sqrt{1 + e^2} + \frac{\sqrt{2 + e^2}}{\sqrt{2 - e}} = \frac{L_0}{(r_2 - r_1 - (r_2 - r_0) \cos \alpha) \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (4)$$

Чтобы найти дальность и диаметр замкнутой кольцевой струи, заметим, что эксцентриситеты у внешней линии тока и ЦЛТ равны, а параметр внешней линии тока легко вычисляется. Он равен длине перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BD , т.е.

$$P = (r_2 - r_1) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

С учетом этого замечания получим длину отрезка

$$BE = (r_2 - r_1) \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{P}{1-e} = (r_2 - r_1) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1-e} \right).$$

Откуда следует формула дальнобойности L струи (длина отрезка OG).

С учетом того, что $OG = BE \cos \frac{\alpha}{2}$, получим

$$L = (r_2 - r_1) \left(\frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1-e} \right). \quad (5)$$

Вычисление диаметра струи начинаем с определения расстояния от центра большого эллипса до точки его касания с осью x . Используя формулу большой полуоси эллипса

$$a = \frac{P}{1-e^2},$$

получим

$$BF = (r_2 - r_1) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{e \cos \frac{\alpha}{2}}{1-e^2} \right).$$

Поэтому

$$KF = \frac{r_1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + (r_2 - r_1) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{e \cos \frac{\alpha}{2}}{1-e^2} \right),$$

а с учетом того, что

$$R = 2FQ = 2KF \sin \frac{\alpha}{2},$$

запишем формулу внешнего диаметра замкнутой кольцевой струи

$$D_2 = 2r_1 + (r_2 - r_1) \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{e \cos \alpha}{2(1-e^2)} \right). \quad (6)$$

В обозначениях рисунка запишем окончательно

$$D_2 = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{e \cos \alpha}{2(1-e^2)} \right); \quad (7)$$

$$L = 0,5(d_2 - d_1) \left(\frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1-e} \right). \quad (8)$$

Формулы (6)...(8) показывают влияние эксцентриситета на размеры замкнутой кольцевой струи, зависящие согласно (4) от размеров сопла, угла выхода и дальнобойности эквивалентной по расходу газа прямоочной струи. Увеличение эксцентриситета, как следует из (7) и (8), приводит к увеличению дальнобойности и диаметра струи. Под дальнобойностью струи будем понимать расстояние, на котором осевая скорость струи обращается в нуль.

Определение угла α для кольцевой струи также требует обоснования, в основу которого возьмем соответствующий угол эквивалентной по расходу газа прямоочной струи. Для этого плоскость осевого сечения $z = x + iy$ канала с круглым сечением конформно отображим на плоскость осевого сечения $f(z) = u + i\vartheta$ канала с кольцевым сечением так, чтобы прямые $z = x - iR_0$, $z = x$ и $z = x + iR_0$ в плоскости $u + i\vartheta$ отвечали прямым $u + ib$, $u + ib_0$, $u + ib_2$, (здесь R_0 — радиус струи с круглым соплом, b_1 — внутренний радиус сопла кольцевой струи, b_2 — внешний радиус сопла кольцевой струи, $b_0 = r_0$ — радиус цилиндрической поверхности, на которой при выходе из кольцевого сопла осевая скорость принимает наибольшее значение).

Оператор на плоскости комплексного переменного, удовлетворяющий такому отображению, имеет вид

$$F(\operatorname{Re} z + ir_j) = \sum_{i=0}^2 L_i(z)(\operatorname{Re} z + ib_j), \quad (9)$$

$$\text{где } L_0(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)}; \quad L_1(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_2)}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)}; \quad L_2(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1)}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)}; \quad z_0 = 0; \quad z_1 = -ir_0; \\ z_2 = ir_0.$$

Выберем на прямой $\operatorname{Re} z + ib$ точки при $\operatorname{Re} z = 0$ и подставим их в (9). После такой замены при $z = x + iy$ получим функцию

$$f(z) = u(x, y) + i\vartheta(x, y), \quad (10)$$

$$\text{где } u(x, y) = \frac{B}{r_0^2} xy + \frac{h}{2r_0} x, \quad \vartheta(x, y) = -\frac{B}{2r_0^2} x^2 + \frac{B}{2r_0^2} y^2 + \frac{h}{2r_0} y + b_0, \quad B = b_1 + b_2 - 2b_0, \quad h = b_2 - b_1.$$

Запишем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B}{r_0^2} y + \frac{h}{2r_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{B}{r_0^2} x, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{B}{r_0^2} x, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{B}{r_0^2} y + \frac{h}{2r_0},$$

откуда следуют условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Поэтому функция $f(z)$ является аналитической и конформно отображает осевое сечение струи с круглым соплом на осевое сечение струи с кольцевым соплом. При условии равенства расходов газа обеих струй между радиусом круглой струи R_0 , толщиной кольцевой струи h и ее координатами b_1 , b_2 и b_0 имеются функциональные связи. Если средние осевые скорости равны, то равенство расходов эквивалентно равенству площадей круглой и кольцевой струи на выходе из сопла, т.е.

$$b_2^2 - b_1^2 = R_0^2.$$

Так как толщина кольцевой струи на выходе из сопла $h = b_2 - b_1$, то исходные размеры b_1 , b_2 определяем, решив систему из двух последних уравнений. В результате решения получим

$$b_1 = \frac{R_0^2 - h^2}{2h}, \quad b_2 = \frac{R_0^2 + h^2}{2h}. \quad (11)$$

Мнимая часть аналитической функции $f(z)$, как это видно из (11), содержит также параметр b_0 , равный такому расстоянию от аксиальной оси на выходе струи из сопла, при котором осевые скорости внутри кольца достигают максимума. Отсюда следует, что, отображая эпюру осевых скоростей в устье круглой струи с помощью функции $f(z)$, можно

получить эпюру осевой скорости в устье кольцевой струи, причем максимум осевой скорости круглой струи функции $f(z)$ отобразится на максимум осевой скорости кольцевой струи. Полоса $r_0 \leq y \leq R_0$ в комплексной плоскости $z = x + iy$ отображается на полосу $b_1 \leq \vartheta \leq b_2$ в комплексной плоскости $w = u + i\vartheta$ так, что ось x переходит в прямую $u + ib_0$, которая является образующей цилиндрической поверхности внутри кольцевого канала перед устьем сопла. Если эта цилиндрическая поверхность разделяет объем кольцевого канала на две равные части, то значение b_0 равняется среднему квадратическому значений b_1, b_2 т.е.

$$b_0 = \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}}.$$

С учетом (11) получим

$$b_0 = \frac{1}{2h} \sqrt{r_0^4 + h^4}. \quad (12)$$

Как показывают расчеты, для реального интервала геометрических размеров, когда $1 \leq R_0/h \leq 2$, средне квадратическое (12) практически совпадает со средним арифметическим $\bar{b} = 0,5(b_1 + b_2)$. Тогда после подстановки в (10) вместо b_0 среднего арифметического \bar{b} получим $B = 0$ и линейную функцию от $z = x + iy$, т.е.

$$f(z) = \frac{h}{2r_0}x + i \left(\frac{h}{2r_0}y + 2\bar{b}r_0^2 \right).$$

Из определения \bar{b} находим $\bar{b} = R_0^2/2h$ и окончательную формулу конформного отображения плоскости $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{h}{2r_0}x + i \left(\frac{h}{2r_0}y + \frac{R_0^2}{2h} \right). \quad (13)$$

Линейная функция (13) отображает все прямые осевого сечения круглой струи на прямые осевого сечения кольцевой струи. Это обстоятельство позволяет изучать структуру кольцевой струи по известной структуре круглой струи. Применяв этот метод, найдем угол выхода из сопла кольцевой струи.

Пусть условный источник круглой струи K имеет координаты $x = -a, y = 0$. Тогда условный источник кольцевой струи имеет, согласно (13), имеет координаты

$$u_0 = -\frac{ah}{2R_0}, \quad \vartheta_0 = -\frac{R_0^2}{2h}.$$

Отсюда определим тангенс угла выхода кольцевой струи

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b_2 - \vartheta_0}{u_0} = \frac{R_0}{a}.$$

Последнее равенство показывает, что при отсутствии закрутки углы выхода круговой и цилиндрической струй равны.

При закрутке радиус свободной поверхности струи увеличивается и равен

$$r = \sqrt{r_1 + (r_1 - r_0)^2 \left(\frac{u_\varphi}{u_r} \right)^2}, \quad (14)$$

где r_1 — радиус прямоточной струи,

u_r — радиальная скорость прямоточной струи,

u_φ — окружная скорость закрученной струи.

С учетом того, что

$$\frac{u_\varphi}{u_r} = \frac{u_\varphi}{u_x} \cdot \frac{u_x}{u_r},$$

из (14) получим

$$r = \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{u_\varphi}{u_x}\right)^2 (r_1 - r_0)^2 \operatorname{ctg}^2 \psi},$$

откуда, осредняя отношение скоростей, окончательно запишем

$$r = \sqrt{r_1^2 + j^2 (r_1 - r_0)^2}, \quad (15)$$

где $j = (\vartheta_\varphi / \vartheta_x) \operatorname{ctg} \psi$,

ϑ_x , ϑ_φ — средние осевая и окружная скорости в устье струи, соответственно.

Из (15) видно, что радиальная координата закрученной струи выражается через соответствующую координату прямоточной струи, ее угол выхода, радиус сопла, а также через параметр закрутки, являющийся функцией отношения $\vartheta_\varphi / \vartheta_x$.

В сильно закрученных потоках наблюдается образование приосевой рециркуляционной зоны. Последующее усиление закрутки увеличивает длину и ширину струи, что требует других методов определения введенных эмпирических коэффициентов.

Траектории закрученной струи определяются уравнениями

$$\frac{dr}{dx} = \frac{u_r}{u_x}; \quad u_\varphi = \alpha u_r; \quad \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Из (15) и (16) можно получить основное отношение поля скоростей

$$\frac{u_r}{u_x} = \frac{r_0 + bx}{\sqrt{\delta^2 x^2 + (x + x_0)^2}}; \quad b = \frac{r_0(1 + \delta^2)}{\alpha}. \quad (17)$$

С учетом (16) и (17) независимо от интенсивности закрутки, общее уравнение осевой скорости имеет вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{r_0 + bx}{\sqrt{\delta^2 x^2 + (x + x_0)^2}} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{r_0 + bx}{r \sqrt{\delta^2 x^2 + (x + x_0)^2}} u_x = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) позволяет построить эпюры скоростей в произвольном сечении струи, необходимые для оценки сепарационной способности аппарата.

Литература

1. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. — М.: Наука, 1984. — 716 с.
2. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. — М.: Машиностроение, 1969. — 400 с.

Поступила в редакцию 1 июня 2007 г.