

УДК 66.045: 624.073.2

О.С. Савельева, канд. техн. наук, доц.,  
 Ю.М. Хомяк, канд. техн. наук, доц.,  
 В.В. Плеско, магистр,  
 Одес. нац. политехн. ун-т

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИЙ КОЖУХОТРУБНЫХ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

О.С. Савельева, Ю.М. Хомяк, В.В. Плеско. **Математичні моделі конструкцій кожухотрубних теплообмінних апаратів.** Запропоновано математичні моделі для теплообмінних апаратів різних конструктивних типів, в яких трубний пучок вважається пружною основою Пастернака. Сформульовано граничні умови для розрахунку констант рівнянь вигину трубної решітки та корпусу.

O.S. Saveleva, Yu.M. Khomiak, V.V. Plesko. **The mathematical models for designs of a shell-and-tube heat exchangers.** The mathematical models for shell-and-tube heat exchangers of various constructive types, in which a trumpet bunch is considered by Pasternak basis, are proposed. Boundary conditions for definition of constants in the equations of a bend of a trumpet lattice and the shell are formulated.

Давление теплоносителей и температурный градиент обуславливают в элементах кожухотрубных теплообменных аппаратов (КТА) деформации двух видов – осевые (растяжение-сжатие корпуса и трубок) и изгибные. Последние следует считать вторичными, т.к. они возникают из-за изгиба трубных решеток вследствие воздействия на них осевых усилий (распора) трубок.

Давление теплоносителей нагружает также трубки и корпус в поперечном направлении, вызывая дополнительные продольные деформации в соответствии с эффектом Пуассона. В используемых методах расчета напряженного состояния КТА учитываются лишь некоторые виды нагрузок из указанного комплекса [1].

Механическое взаимодействие теплообменных трубок и корпуса у КТА жесткого типа осуществляется через трубную решетку. Поэтому математическая формулировка задачи расчета напряженного состояния сводится к описанию поведения трубной решетки под воздействием как непосредственных нагрузок (давление теплоносителей), так и опосредованных — от взаимодействия с теплообменными трубками (ТТ) и корпусом. Для КТА цилиндрической формы представим трубную решетку (ТР) как круглую осесимметрично нагруженную пластину. Указанные нагрузки приведут к перемещению и изгибу ТР, т.е. любая точка срединной плоскости с координатой  $r$  переместится на величину

$$v(r) = v_0 + v_1(r), \quad (1)$$

причем  $v_1(a) = 0$ , так что  $v(a) = v_0$  (рис. 1), здесь  $a$  – радиус срединной поверхности корпуса.

Выражение (1) дает возможность сформулировать математическую модель КТА первого уровня. Эта модель применяется для КТА жесткого типа в случаях, когда цилиндрическая жесткость их  $D_0$  для ТР весьма велика, так что в (1) вторым слагаемым можно пренебречь. При этом из условия равенства перемещения ТР,  $v_0$  и удлинения корпуса получим формулы для продольных сил:

$$P_T = P_K - \frac{\tau_1}{\tau_0} \left( \frac{c_T}{c_K} - 1 \right), \quad P_K = \frac{\tau_t + \tau_1 + \tau_2}{\tau_0}, \quad (2)$$

где  $\tau_t = (\alpha_T t_T - \alpha_K t_K) / c_K$ ;

$$\tau_0 = 1 + \frac{c_K}{c_T};$$

$$\tau_1 = p_1 (f_K - N F_T); \quad (3)$$

$$\tau_2 = 2 \left[ \mu_T N (p_1 F_T - p_2 f_T) \frac{c_K}{c_T} + \mu_K p_1 f_K \right];$$

$\alpha$  — коэффициент линейного расширения;  
 $t$  — температура;  
 $N$  — количество трубок в аппарате;  
 $\mu$  — коэффициенты Пуассона.

Индексы “К” и “Т” обозначают характеристики, относящиеся соответственно к корпусу и трубкам.  
 В выражениях (3) введены обозначения для площадей и коэффициентов жесткости

$$f = \frac{\pi d^2}{4}, \quad F = \frac{\pi D^2}{4},$$

$$c_K = \frac{E_K A_K}{l}, \quad c_T = \frac{E_T A_T N}{l}, \quad (4)$$

где  $D, d$  — наружные и внутренние диаметры;  
 $E$  — модули упругости;  
 $A$  — площади поперечных сечений;  
 $l$  — полудлина трубок.

Модель первого уровня позволяет найти напряжения, возникающие в корпусе и трубках,

$$\sigma_K = \frac{P_K}{A_K}, \quad \sigma_T = \frac{-P_T}{NA_T}, \quad (5)$$

и провести проверку прочности и устойчивости [2].

Эта модель учитывает влияние всех эксплуатационных и геометрических характеристик КТА на величину напряжений (5), кроме характеристик изгибной жесткости. В традиционных методиках расчета КТА ограничиваются моделью первого уровня, причем, как правило, учитывают лишь влияние температурного фактора  $\tau_t$ , изредка — действие давления (фактор  $\tau_1$ ) и не принимают во внимание влияние поперечной деформации (фактор  $\tau_2$ ).

Изгиб ТР приводит к перераспределению действующей на нее нагрузки и возникновению изгибных напряжений. Для исследования этих явлений следует перейти к математической модели КТА второго уровня. Эта модель основана на уравнениях, описывающих изгиб ТР, ТТ и корпуса.

Перемещение ТР как круглой пластинки в случае изгиба подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$L^2[v(r)] = \frac{g(r)}{D_0}, \quad (6)$$

где  $r$  — радиальная координата;  
 $D_0$  — цилиндрическая жесткость;  
 $g(r)$  — поперечная нагрузка.

В выражении (6) дифференциальный оператор

$$L[f(r)] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{df(r)}{dr}. \quad (7)$$

Будем считать, что перфорированная ТР заменяется эквивалентной сплошной пластиной с условными механическими характеристиками — модулем упругости  $E_*$  и коэффициентом Пуассона  $\mu_*$ . В зависимости от отношения наружного диаметра отверстий  $D_T$  к расстоянию  $b$  между их осями (шагу) значения этих условных характеристик можно найти из графика (рис. 2) [1]. Если модуль упругости материала ТР равен  $E$ , то условный модуль упругости определяется из выражения  $E_* = e_* E$ , следовательно, входящая цилиндрическая жесткость определяется как

$$D_0 = \frac{e_* E h^3}{12(1 - \mu_*^2)}, \quad (8)$$

где  $h$  — толщина ТР.

Числитель  $g(r)$  в уравнении (6) есть совокупность всех поперечных нагрузок, вызывающих изгиб решетки. При принятом направлении оси  $z$

$$g(r) = p_0 + p_3(r) - p_4(r), \quad (9)$$

где первое слагаемое является константой. Оно включает приведенные давления теплоносителей  $p_1^*$ ,  $p_2^*$  и давление  $p_\mu$ , обусловленное эффектом Пуассона,

$$p_0 = p_1^* - p_2^* - p_\mu = p_1 - p_2 + N(1 - 2\mu_T)(p_2 f_T - p_1 F_T) / f_K. \quad (10)$$

Будем считать, что КТА имеет две одинаковые ТР и не имеет промежуточных опор. В этом случае деформация трубок будет симметрична относительно срединного поперечного сечения аппарата. Удлинение и изгиб трубок определяют соответственно третью и четвертую компоненты нагрузки  $g(r)$  [3]

$$p_3(r) = \frac{NA_T E_T}{lf_K} v(r), \quad (11)$$

$$p_4(r) = 3 \frac{E_T I_T}{\pi l b^2} L[v(r)], \quad (12)$$

где  $I_T$  — осевой момент инерции поперечного сечения трубки.

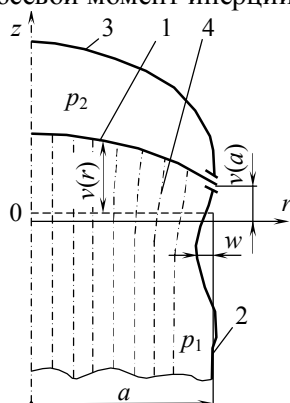


Рис. 1. Схема деформации элементов КТА:  
1 — трубная решетка; 2 — корпус; 3 — крышка  
4 — теплообменные трубки

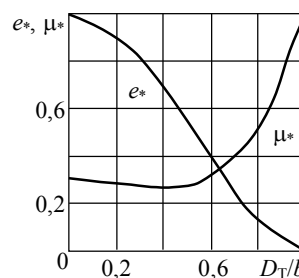


Рис. 2. Коэффициенты условных механических характеристик перфорированных пластин

С учетом (10)...(12) уравнение (6) примет вид

$$L^2[v(r)] + 2\psi^2 L[v(r)] - \chi^4 v(r) = p_0 / D_0, \quad (13)$$

здесь коэффициенты — параметры упругого основания Пастернака —

$$\psi^2 = 1,5 \frac{E_T I_T}{\pi l b^2 D_0}, \quad \chi^4 = \frac{NA_T E_T}{lf_K D_0}. \quad (14)$$

Общее решение однородного уравнения (13), содержащего дифференциальный оператор (7), представим функцией Бесселя нулевого порядка  $v(r) = Z_0(sr)$  с аргументом, содержащим неизвестный множитель  $s$ . Учитывая свойства функции Бесселя [4]

$$L[Z_0(sr)] = -s^2 Z_0(sr), \quad L^2[Z_0(sr)] = s^4 Z_0(sr), \quad (15)$$

получим характеристическое уравнение

$$s^4 - 2\psi^2 s^2 - \chi^4 = 0. \quad (16)$$

Корнями этого уравнения являются

$$s_{1,3} = \pm t_{\overline{\psi}}, \quad s_{2,4} = \pm it_2, \quad (17)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица;

$$t_{1,2} = \sqrt{\sqrt{\psi^4 + \chi^4} \pm \psi^2}.$$

Таким образом, решениями однородного дифференциального уравнения (13) являются функции Бесселя  $Z_0(s_n r)$  первого и второго рода с одним из четырех значений множителя  $s_n$  (17).

В случае нулевого порядка функции Бесселя являются четными, поэтому для обеспечения линейной независимости решения ограничимся положительными числами  $s_n$ . Для мнимых значений аргумента решениями являются модифицированные функции Бесселя  $I_0$  и  $K_0$ . Следовательно, общее решение уравнения (13) должно включать функции Бесселя  $J_0(rt_1)$ ,  $I_0(rt_2)$ ,  $Y_0(rt_1)$ ,  $K_0(rt_2)$ .

Правая часть определяющего уравнения (13) — величина постоянная, поэтому частным решением является константа

$$\bar{v} = \frac{p_0}{\chi^4 D_0} - \frac{p_0 f_K}{NE_T A_T}. \quad (18)$$

Функции Бесселя второго рода  $Y_0$  и  $K_0$  при  $r \rightarrow 0$  неограниченно возрастают, тогда как прогиб в центре трубной решетки  $v(0)$  должен иметь конечную величину. Этому требованию удовлетворяют лишь функции Бесселя первого рода. Решение уравнения (13) для модели КТА жесткого типа (рис. 3) имеет вид

$$v(r) = A_1 J_0(rt_1) + A_2 I_0(rt_2) - \frac{p_0 f_K}{NE_T A_T}. \quad (19)$$

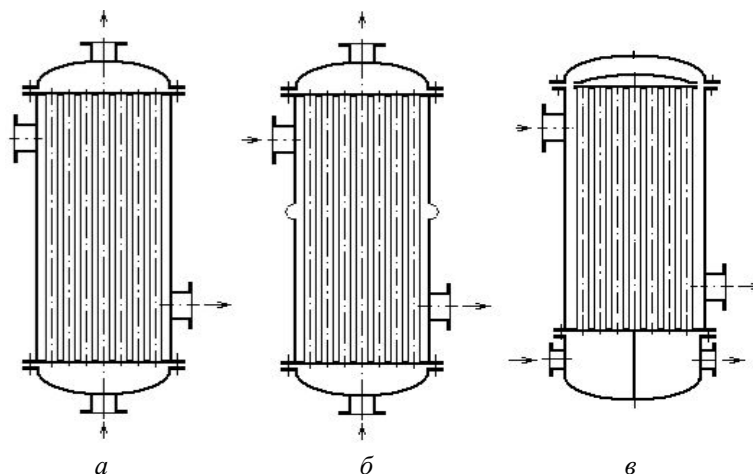


Рис. 3. Типы КТА: жесткий (а); с линзовым компенсатором (б); с плавающей головкой (в)

В случае, когда изгибная жесткость трубок пренебрежимо мала, следует принять  $\psi=0$ , и корни уравнения (11) будут

$$s_{1,3} = \pm\chi, s_{2,4} = \pm i\chi.$$

В этой модели второго уровня решение (20) примет форму

$$v(r) = A_1 J_0(r\chi) + A_2 I_0(r\chi) - \frac{p_0 f_K}{NE_T A_T}. \quad (20)$$

Модель второго уровня, в которой учитывается лишь один параметр осевой жесткости ТТ  $\chi$  (9), называется моделью Винклера. Эта математическая модель является простейшей из применяемых моделей упругого основания.

Ко второму уровню относится также и вариант модели, в которой можно пренебречь параметром осевой жесткости, т.е. считать  $\chi=0$ , но  $\psi \neq 0$ .

В этом случае характеристическое уравнение (16) приводится к виду

$$s^4 - 2\Psi^2 s^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$s_{1,3} = 0, s_{2,4} = \pm\sqrt{2}\Psi,$$

а изогнутая поверхность будет иметь форму

$$v(r) = A_1 + A_2 J_0(\sqrt{2}\Psi r) - \frac{p_0 f_K}{NE_T A_T}. \quad (21)$$

При построении решений (20) и (21), как и для (19), отброшены функции, неограниченно возрастающие при  $r \rightarrow 0$ .

Для конструкций КТА с линзовыми компенсаторами (рис. 3, б) и плавающей головкой (рис. 3, в) осевая сила  $P_0 = 0$ , так что для их расчета следует применять модель второго уровня.

Корпус и ТР у КТА жесткого типа нагружается давлением  $p_1$  в межтрубном пространстве. В модели первого уровня корпус рассматривается как стержень, работающий на растяжение. Его удлинение равно первому слагаемому формулы (1)

$$v_0 = P_0 / c_K. \quad (22)$$

Константы уравнений (19)...(21)  $A_1, A_2$  следует определять из условий закрепления ТР. В модели второго уровня для формулировки этих условий следует привлечь решение дифференциального уравнения изгиба корпуса как длинной цилиндрической моментной оболочки. Это решение для занимаемой корпусом области  $z < 0$  (см. рисунок 1) представим с помощью метода начальных параметров в виде [3]

$$w(z) = \frac{M_0}{2D\beta^2} e^{\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z) - \frac{Q_0}{2D\beta^3} e^{\beta z} \cos \beta z + \bar{w}, \quad (23)$$

где  $\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{a^2 h_K^2}}$ ;  $D = \frac{E h_K^3}{12(1-\mu^2)}$ ;

$M_0, Q_0$  — крайние момент и поперечная сила, соответственно;  
 $h_K$  — толщина стенки корпуса.

В (23) частное решение

$$\bar{w} = \left( p_1 - \frac{\mu_K T_Z}{a} \right) \frac{a^2}{E_K h_K}. \quad (24)$$

Осевое усилие в корпусе  $T_Z = P_0 / (2\pi a)$ .

Условия закрепления ТР определяются совместностью ее деформирования с корпусом, т.е. для значений  $r = a, z = 0$ . Наряду с  $A_1$  и  $A_2$  неизвестными являются и усилия  $M_0, Q_0$ , поэтому формулируются четыре условия:

— условие нерастяжимости ТР

$$w(z)|_{z=0} = 0,$$

— равенство углов поворота решетки и корпуса

$$\frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} = - \frac{dv}{dr} \Big|_{r=a},$$

— равенство осевых перемещений на контуре в соответствии с (1) и (22)

$$v(a) = P_0 / c_K,$$

— равенство крайних изгибающих моментов

$$M_r(a) = M_0.$$

После подстановки и преобразования получим систему уравнений с четырьмя неизвестными

$$0,5B_M - B_Q - \left( p_1 - \mu_K \frac{P_0}{2\pi a^2} \right) \frac{\beta a^2}{E_K h_K};$$

$$B_M \left( 1 + \frac{\beta a}{1 + \mu_K} \frac{D}{D_0} \right) - B_Q - A_1 t_1 J_1(at_1) + A_2 t_2 I_1(at_2) = 0;$$

$$A_1 J_0(at_1) + A_2 I_0(at_2) \frac{P_0}{c_K} + \frac{p_0 f_K}{NE_T A_T};$$

$$A_1 C_1 - A_2 C_2 = 2 \frac{M_0}{D_0}.$$

Здесь  $B_M = M_0/(\beta D_K)$ ;  $B_Q = Q_0/(2\beta^2 D_K)$ ;  $C_1 = t_1^2 \left[ J_0(at_1) - (1 - \mu_*) \frac{J_1(at_1)}{at_1} \right]$ ;

$$C_2 = t_2^2 \left[ I_0(at_2) - (1 - \mu_*) \frac{I_1(at_2)}{at_2} \right].$$

В качестве примера был рассмотрен КТА жесткой конструкции с размерами  $a=200$  мм,  $D_T=25$  мм,  $d_T=21$  мм,  $b=32$  мм,  $N=111$ ,  $l=2000$  мм,  $E_K=2 \cdot 10^5$  МПа,  $E_T=1,1 \cdot 10^5$  МПа,  $\alpha_K=13,6 \cdot 10^{-6}$  1/град,  $\alpha_K=11,9 \cdot 10^{-6}$  1/град,  $t_K=30$  °С,  $t_T=80$  °С,  $h_{TP}=20$  мм,  $p_2=2$  МПа. Варьировались толщина стенки корпуса и давление в межтрубном пространстве. Результаты вычислений максимальных напряжений, возникающих в стенке корпуса по модели первого уровня,  $\sigma_K$ , и с учетом изгиба по модели второго уровня,  $\sigma_\Sigma$ , представлены в таблице.

Максимальные напряжения в стенке корпуса

$h$ , мм	$p_1 = 0$ МПа		$p_1 = 0,5$ МПа		$p_1 = 1,0$ МПа		$p_1 = 1,5$ МПа		$p_1 = 2$ МПа	
	$\sigma_K$ , МПа	$\sigma_\Sigma$ , МПа	$\sigma_K$ , МПа	$\sigma_\Sigma$ , МПа	$\sigma_K$ , МПа	$\sigma_\Sigma$ , МПа	$\sigma_K$ , МПа	$\sigma_\Sigma$ , МПа	$\sigma_K$ , МПа	$\sigma_\Sigma$ , МПа
3	71,15	568,7	139,61	835,49	208,06	2097,4	276,52	3359,4	344,97	4621,3
4	64,2	314,8	110,74	299,65	157,26	785,75	203,79	1271,9	250,32	1758
6	53,65	131,9	79,798	94,391	105,94	213,39	132,09	332,39	158,23	451,39
8	46,01	76,14	62,978	65,379	79,939	105,27	96,901	149,96	113,86	194,65
10	40,23	53,66	52,2	55,364	64,165	71,267	76,131	93,499	88,097	115,73
12	35,7	42,13	44,629	46,752	53,553	55,732	62,478	68,958	71,402	82,185
14	32,06	35,08	38,988	40,132	45,916	46,65	52,843	55,455	59,77	64,26
16	29,06	30,25	34,609	35,033	40,151	40,487	45,693	46,79	51,235	53,093
18	26,56	26,68	31,103	31,179	35,643	35,918	40,183	40,657	44,723	45,396
20	24,43	24,95	28,229	28,647	32,02	32,337	35,811	36,028	39,602	39,718

Анализ показывает, что модель второго уровня существенно изменяет величину напряжений при значительном различии толщины ТР и корпуса. Изменение давления в межтрубном пространстве оказывает менее существенное влияние на величину напряжений.

### Литература

1. Сосуды и трубопроводы высокого давления: Справ. / Е.Р. Хисматулин, Е.М. Королев, В.И. Лившиц и др. — М.: Машиностроение, 1990. — 384 с.
2. Савельева О.С. Влияние поперечной деформации на напряженное состояние элементов кожухотрубного теплообменного аппарата / Савельева О.С., Хомяк Ю.М. // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2004. — Вып. 2(22). — С. 28 — 31.

- 
3. Хомяк Ю.М. Трубный пучок как двухпараметрическое упругое основание для трубных решеток / Хомяк Ю.М., Савельева О.С. // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2002. — Спецвып. — С. 84 — 87.
  4. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
  5. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. — М.: Машиностроение, 1973. — 456 с.

Поступила в редакцию 6 октября 2005 г.