

УДК 539.3:621.833

Р.А. Мацей, канд. техн. наук, доц.,
Э.Д. Кравцов, канд. техн. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т

ГЕОМЕТРИЯ АРОЧНЫХ ЗУБЬЕВ, НАРЕЗАЕМЫХ СПОСОБОМ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЛЕНИЯ В ПЕРЕДАЧЕ ЗУБЧАТЫМ РЕМНЕМ

Р.О. Мацей, Е.Д. Кравцов. Геометрія арочних зуб'їв, нарізаних способом безперервного поділу у передачі зубчастим пасом. Визначено координати бокових поверхонь зуба паса і западини шківа при нарізанні способом безперервного поділу. Необхідна геометрія активних поверхонь западин досягається за рахунок установлених співвідношень налагодження кута верстатного зачеплення і відносного колового зміщення інструменту. При нарізанні арочних зуб'їв забезпечується висока точність колових кроків і висока продуктивність.

Р.А. Мацей, Э.Д. Кравцов. Геометрия арочных зубьев, нарезаемых способом непрерывного деления в передаче зубчатым ремнем. Определены координаты боковых поверхностей зуба ремня и впадины шкива при нарезании способом непрерывного деления. Необходимая геометрия активных поверхностей впадины достигается за счет установленных соотношений наладок угла станочного зацепления и относительного углового смещения инструмента. При нарезании арочных зубьев обеспечивается высокая точность окружных шагов зубьев и высокая производительность.

R.A. Matsey, E.D. Kravtsov. The geometry of arched gear, cut by the method of continuous indexing in a toothed-belt transmission. The coordinates of side surfaces in toothed-belt and the hollows of a belt-pulley have been determined by the method of continuous indexing. The necessary geometry of active surfaces in the hollows is achieved with the help of fixed correlation of angle adjustment in a machine-tool engagement and relative angular displacement of the tool. In the process of cutting the arched gear, a high precision of circle pitches in the gear, as well as high productivity is provided.

Геометрия передач зубчатым ремнем, арочные зубья которой нарезаются способом единичного деления, достаточно исследована [1]. Недостатком метода является малая производительность нарезания впадин шкива и значительные погрешности окружных шагов, что присуще этому способу формообразования зубьев. Для увеличения производительности и повышения точности нарезания впадин шкива применим схему формообразования зубьев методом обкатки при непрерывном делении [2]. Зубья шкива в этом случае имеют повышенную точность шага, что способствует более плавному пересопряжению зубьев в передаче зубчатым ремнем. Для выяснения особенностей зацепления в передаче зубчатым ремнем, впадины шкива которой нарезаются указанным методом, необходимо иметь уравнения активных поверхностей зубьев, а также рабочего поля зацепления. Используя такие уравнения, можно рассчитать зазоры в каждой фазе пересопряжения, что является исходной информацией для анализа кинематики зацепления и решения контактной задачи с целью определения характера распределения нагрузки на рабочих поверхностях зубьев. Кроме этого, уравнения рабочих и переходных поверхностей позволяют определить координаты сеточного каркаса для расчета напряженно-деформированного состояния зубьев методом конечных элементов.

Рассмотрим схему нарезания зубьев шкива методом обката при непрерывном делении. Торцевая резцовая головка, установленная на протяжном суппорте, перемещается по касательной к заготовке и вращается с частотой, обеспечивающей необходимую скорость резания (рис. 1).

Вращательные движения резцовой головки 1 и заготовки шкива 2 при нарезании z_k зубьев согласованы так, что при повороте головки на угол $\varphi_{r1} = 2\pi$ заготовка поворачивается на угол $\varphi_d = 2\pi / z_k$, чем обеспечивается непрерывное деление. При тангенциальном перемещении S_t суппорта заготовке с помощью дифференциального механизма сообщается дополнительное

вращение на угол φ_0 , образующее обкат. Количество, форма, радиус вращения и ориентация режущих кромок, а также смещение оси вращения головки относительно плоскости симметрии нарезаемой заготовки на величину δ_0 определяются из условия обеспечения заданной геометрии активных поверхностей, требуемой окружной толщины впадин и симметрии расположения профилей зубьев на правом и левом торцах. Кроме этого учитываются требования производительности нарезания и ряд технологических ограничений.

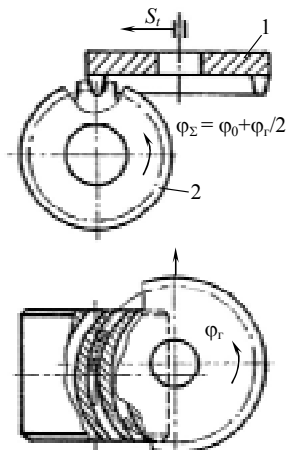


Рис. 1. Схема нарезания арочных зубьев шкива способом непрерывного деления

Уравнение поверхностей зубьев получим, используя четыре системы координат: $S_r(X_r, Y_r, Z_r)$ — режущей головки, $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$, $S^n(X^n, Y^n, Z^n)$ — вспомогательных неподвижных и подвижной системы, $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ — заготовки шкива.

Введем следующие обозначения:

α — угол наклона прямолинейных режущих кромок к оси вращения режущей головки;

u — независимый параметр, определяющий положение произвольной точки на режущей кромке;

φ_{r1} — независимый угловой параметр, определяющий положение первой режущей кромки группы резцов;

$\Delta\varphi_r$ — угловой шаг между проекциями режущих кромок группы резцов на делительную плоскость;

N_r — порядковый номер, определяющий положение рассматриваемой n -й режущей кромки группы;

i — радиус вращения точки на рассматриваемой режущей кромке режущей головки в делительной плоскости;

r_1 — радиус делительного цилиндра заготовки шкива.

Схема режущей головки, включающая группу резцов, в частности, с прямолинейными режущими кромками представлена на рис. 2. В случае, когда режущие кромки инструмента имеют криволинейную форму, излагаемый подход остается также справедливым.

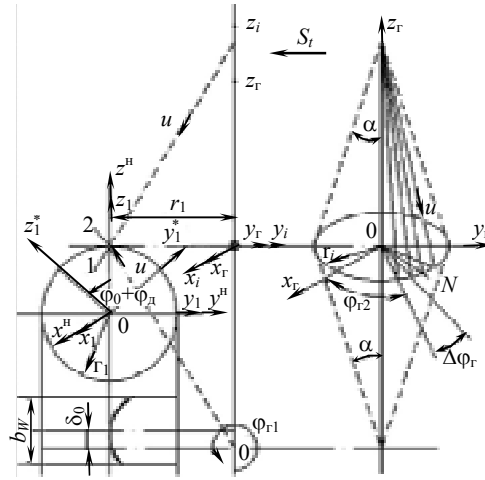


Рис. 2. Схема нарезания зубьев шкива лезвийным инструментом методом обката при непрерывном делении

Не накладывая ограничений на геометрию режущей кромки и ее ориентацию относительно системы S_r координаты произвольной точки кромки в неподвижной системе S_i обозначим X_i, Y_i, Z_i . В неподвижной системе S^H эти координаты выразятся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X^H &= X_i + d_0; \\ Y^H &= r_i + Y_i; \\ Z^H &= Z_i + r_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая суммарный угол

$$\varphi_\Sigma = \varphi_0 + \varphi_{r1}/z_k \quad (2)$$

поворота колеса, координаты режущей кромки в системе S_1 определяются уравнениями

$$\begin{aligned} X_1 &= X^H \\ Y_1 &= Z^H \sin \varphi_\Sigma + y^H \cos \varphi_\Sigma; \\ Z_1 &= Z^H \cos \varphi_\Sigma - y^H \sin \varphi_\Sigma. \end{aligned} \quad (3)$$

На рисунке 2 текущее положение осей в результате такого поворота обозначено Y_1^*, Z_1^* .

Уравнение станочного зацепления в векторной форме имеет вид [3]

$$\begin{cases} \bar{r}_1 = \bar{r}_1(u, \varphi_{r1}, \varphi_0); \\ \left[\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi_{r1}} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi_0} \right] = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{r1}} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_{r1}} & \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_{r1}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_0} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Элементами определителя являются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{\partial x^H}{\partial u}; \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} &= \frac{\partial y^H}{\partial u} \cos \varphi_\Sigma + \frac{\partial z^H}{\partial u} \sin \varphi_\Sigma; \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} &= \frac{\partial z^H}{\partial u} \cos \varphi_\Sigma - \frac{\partial y^H}{\partial u} \sin \varphi_\Sigma; \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{r1}} &= \frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}}; \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_{r1}} &= \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_{r1}} \cos \varphi_\Sigma - y^H \frac{\sin \varphi_\Sigma}{z_k} + z^H \frac{\cos \varphi_\Sigma}{z_k}; \\ \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_{r1}} &= -z^H \frac{\sin \varphi_\Sigma}{z_k} - \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_{r1}} \sin \varphi_\Sigma - y^H \frac{\cos \varphi_\Sigma}{z_k}; \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_0} &= 0; \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_0} &= \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} \cos \varphi_\Sigma - y^H \sin \varphi_\Sigma + z^H \cos \varphi_\Sigma; \\ \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_0} &= -z^H \sin \varphi_\Sigma - \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} \sin \varphi_\Sigma - y^H \cos \varphi_\Sigma. \end{aligned}$$

Используя известные свойства, преобразуем определитель (5) к виду

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z^H}{\partial u} & \frac{\partial y^H}{\partial u} & \frac{\partial x^H}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_{r1}} - \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} \cdot \frac{1}{z_k} & \frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}} \\ -y^H & \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} + z^H & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда, раскрывая его, получим уравнение зацепления

$$y^H \frac{\partial x^H}{\partial u} \left[\frac{\partial y^H}{\partial \varphi_{r1}} - \frac{1}{z_k} \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} \right] - \frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}} \left[\frac{\partial z^H}{\partial u} \left[\frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} + z^H \right] + \frac{\partial y^H}{\partial u} y^H \right] = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим процесс нарезания в случае, когда угол станочного зацепления $\alpha = 0$.

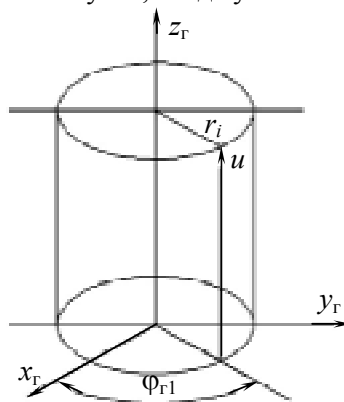


Рис. 3. Производящая поверхность с углом станочного зацепления, равным нулю

Координаты режущих кромок группы резцов в движущейся поступательно системе координат $S_r(x_r, y_r, z_r)$, ось Z_r которой совпадает с осью вращения резцовой головки (рис. 3), определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}x_r &= r_i \cos(\varphi_{r1} + N_r \Delta\varphi_{r1}); \\y_r &= r_i \sin(\varphi_{r1} + N_r \Delta\varphi_{r1}); \\z_r &= u.\end{aligned}\quad (7)$$

Уравнение активной поверхности зуба, нарезаемого, например первым резцом, получим следующим путем. Перепишем координаты режущей кромки резца в систему S_i

$$\begin{aligned}x_i &= x_r; \\y_i &= y_r - r_1\varphi_0; \\z_i &= z_r.\end{aligned}\quad (8)$$

В системе S^H эти координаты имеют вид

$$\begin{aligned}x^H &= r_i \cos \varphi_{r1} + \delta_0; \\y^H &= r_i(1 + \sin \varphi_{r1}) - r_1\varphi_0; \\z^H &= u + r_1.\end{aligned}\quad (9)$$

Учитывается, что

$$\frac{\partial x^H}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial y^H}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}} = -r_i \sin \varphi_{r1}; \quad \frac{\partial z^H}{\partial u} = 1; \quad \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} = -r_1,$$

подставим эти значения в уравнение зацепления (6) и после преобразований получим

$$-r_i \sin \varphi_{r1} u = 0. \quad (10)$$

Так как первые два множителя мультипликативной функции уравнения (10) не равны нулю, $u = 0$. Из этого следует, что геометрия активной поверхности зубьев в этом случае формируется одной точкой режущей кромки инструмента и выражается системой уравнений (3) при условии $N_r \Delta\varphi_r = 0$. Тогда система (3) для этого случая примет вид

$$\begin{aligned}x_1 &= r_i \cos \varphi_{r1} + \delta_0; \\y_1 &= r_1 \sin \varphi_\Sigma + [r_i(1 + \sin \varphi_{r1}) - r_1\varphi_0] \cos \varphi_\Sigma; \\z_1 &= r_1 \cos \varphi_\Sigma - [r_i(1 + \sin \varphi_{r1}) - r_1\varphi_0] \sin \varphi_\Sigma.\end{aligned}\quad (11)$$

Для определения зазоров между рабочими поверхностями зубьев ремня и шкива удобно иметь координаты их профилей в любом сечении плоскостью, перпендикулярной оси вращения шкива. С этой целью получим уравнение профиля зуба шкива в произвольном сечении с координатой x^c . Из первого уравнения системы (11) видно, что

$$\cos \varphi_{r1}^c = \frac{x^c - \delta_0}{r_i},$$

следовательно $\sin \varphi_{r1}^c = -(1 - \cos^2 \varphi_{r1}^c)^{0.5}$,

$$\varphi_{r1}^c = 2\pi - \arccos \frac{x^c - \delta_0}{r_i}. \quad (12)$$

Учитывая уравнение (2) и константу $k = (3p/2)/z_k$, обеспечивающую условие при $\varphi_{r1} = 3p/2$, $\varphi_0 = 0$, суммарный угол $\varphi_\Sigma = 0$. Тогда искомые уравнения выразятся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= r_1 \sin(\varphi_0 + \varphi_{r1}^c - k) + [r_i(1 + \sin \varphi_{r1}^c) - r_1 \varphi_0] \cos\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_{r1}^c}{z_k} - k\right); \\
 z_1 &= r_1 \cos(\varphi_0 + \varphi_{r1}^c - k) - [r_i(1 + \sin \varphi_{r1}^c) - r_1 \varphi_0] \sin\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_{r1}^c}{z_k} - k\right).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Для определения уравнений, описывающих кривую пересечения делительного цилиндра с боковой поверхностью зуба шкива, используем уравнение секущего цилиндра $Z_1^2 + Y_1^2 = r$. Подставив в уравнение секущего цилиндра значения его слагаемых x_1, y_1 из приведенных соотношений и приравняв $r = r_1$, получим $r_i(1 + \sin \varphi_{r1}) - r_1 \varphi_0 = 0$.

Система уравнений, описывающая указанную кривую пересечения, имеет вид

$$\begin{cases}
 x_1 = r_i \cos \varphi_{r1} + \delta_0; \\
 y_1 = r_1 \sin\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_{r1}}{z_k} - k\right); \\
 z_1 = r_1 \cos\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_{r1}}{z_k} - k\right); \\
 \varphi_0 = \frac{r_i(1 + \sin \varphi_{r1})}{r_1}.
 \end{cases}
 \tag{14}$$

Найдем взаимосвязь между координатами этой кривой на делительном цилиндре и в плоскости станочного зацепления (рис. 4).

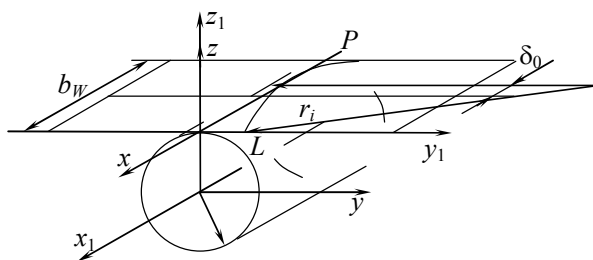


Рис. 4. Взаимосвязь между координатами кривой на делительном цилиндре и в плоскости зацепления

Траектория кривой в указанной плоскости выразится следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \varphi_r^c &= 2\pi - \arccos \frac{x_1^c - \delta_0}{r_1}; \\
 \varphi_0 &= r_i \frac{1 + \sin(\varphi_{r1}^c)}{r_1}; \\
 y_1 &= r_1 \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \varphi_{r1}^c}{z_k} - k \right],
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

где x_1^c — текущая координата рассматриваемого сечения вдоль оси x_1 .

Тогда смещение δ_0 резцовой головки, обеспечивающее симметрию профилей зубьев на левом “L” и правом “P” торцах (см. рисунок 4), определим из нелинейного уравнения $y_1^L - y_1^P = 0$.

Для случая нарезания шкива группой резцов, наклоненных к делительной плоскости под углом α (см. рисунок 2), координаты режущих кромок в системе S_T будут иметь вид

$$\begin{aligned}x_r &= u \sin \alpha \cos(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r); \\y_r &= u \sin \alpha \sin(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r); \\z_r &= \text{sign}(r_i - u \sin \alpha) \text{ctg} \alpha.\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь параметр sign может принимать значения ± 1 , в зависимости от номера 1 или 2 рассматриваемой режущей кромки, соответственно (см. рисунок 2).

Перепишем эти координаты в систему S^H , воспользовавшись системами уравнений (8), (16)

$$\begin{aligned}x^H &= u \sin \alpha \cos(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r) + \delta_0; \\y^H &= r_i + u \sin \alpha \sin(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r) - r_1 \varphi_0; \\z^H &= \text{sign}(r_i - u \sin \alpha) \text{ctg} \alpha + r_1.\end{aligned}\quad (17)$$

Компоненты ранее полученного уравнения (6) применительно к рассматриваемому случаю примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^H}{\partial u} &= \sin \alpha \cos(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r); \\ \frac{\partial y^H}{\partial u} &= \sin \alpha \sin(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r); \\ \frac{\partial z^H}{\partial u} &= -\text{sign} \cos \alpha; \\ \frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}} &= -u \sin \alpha \sin(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r); \\ \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_{r1}} &= u \sin \alpha \cos(\varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r); \\ \frac{\partial y^H}{\partial \varphi_0} &= -r_1.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (6) с учетом обозначения $\varphi_{rn} = \varphi_{r1} + N_r \Delta \varphi_r$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned}(r_i + u \sin \alpha \sin \varphi_{rn} - r_1 \varphi_0)(\sin \alpha \cos \varphi_{rn}) \left(u \sin \alpha \cos \varphi_{rn} + \frac{r_1}{z_k} \right) + u \sin \alpha \sin \varphi_{rn} \times \\ \times \{ \sin \alpha \sin \varphi_{rn} [r_i + u \sin \alpha \sin \varphi_{rn} - r_1 \varphi_0] - \text{sign} \cos \alpha [\text{sign}(r_i - u \sin \alpha) \text{ctg} \alpha] \} = 0.\end{aligned}\quad (18)$$

Запишем уравнение секущей плоскости по аналогии с ранее рассмотренным случаем

$$x_c^H = u \sin \alpha \cos \varphi_{rn} + \delta_0, \quad (19)$$

откуда

$$\cos \varphi_{rn} = \frac{x_c^H - \delta_0}{u \sin \alpha}; \quad (20)$$

$$\sin \varphi_{rn} = \left\{ 1 - \left[\frac{x_c^H - \delta_0}{u \sin \alpha} \right]^2 \right\}^{0,5}, \quad (21)$$

следовательно

$$\varphi_{rn} = 2\pi - \arccos \frac{x_c^H - \delta_0}{u \sin \alpha} . \quad (22)$$

Для определения системы уравнений, описывающей профиль зуба в сечении плоскостью, перпендикулярной оси вращения шкива, выразим параметр φ_0 из уравнения (18)

$$\varphi_0 = \left\{ \left(u \sin \alpha \cos \varphi_{rn} + \frac{r_1}{z_k} \right) \left(r_i \sin \alpha \cos \varphi_{rn} + u \sin^2 \alpha \sin \varphi_{rn} \cos \varphi_{rn} \right) + \right. \\ \left. + u \sin \alpha \sin \varphi_{rn} \left[\sin \alpha \sin \varphi_{rn} r_i + u \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_{rn} - \text{sign} \cos \alpha \left[\text{sign}(r_i - u \sin \alpha) \text{ctg} \alpha \right] \right] \right\} \div \\ \div r_i \sin \alpha \cos \varphi_{rn} \left(u \sin \alpha \cos_{rn} + r_1 / z_k \right) + u \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_{rn} r . \quad (23)$$

Тогда координаты профиля зуба определяются из совместного решения уравнений (2), последних двух уравнений системы (3) и уравнений (22), (23). При этом структура уравнений системы позволяет сделать вывод, что профили зуба в рассматриваемом сечении, получаемые при нарезании различными режущими кромками, не пересекаются. Следовательно, геометрия рабочей поверхности шкива не зависит от числа режущих кромок инструмента в группе, количество которых обусловлено требуемой производительностью нарезания с учетом технологических ограничений на их размещение в резцовой головке.

С целью установления геометрических особенностей рабочих поверхностей шкива рассмотрим боковую поверхность, нарезаемую резцом 1 (см. рисунок 2). Тогда уравнение (18) при $\text{sign} = 1$ преобразуется к виду

$$\left(r_i + u \sin \alpha \sin \varphi_{rn} - r_1 \varphi_0 \right) \left[\cos \varphi_{rn} \frac{r_1}{z_k} / + u \sin \alpha \right] - \\ - u \sin \varphi_{rn} \cos \alpha (r_i - u \sin \alpha) \text{ctg} \alpha = 0, \quad (24)$$

а соответствующее ему значение параметра обкатки

$$\varphi_0 = \frac{\frac{r_i + u \sin \alpha \sin \varphi_{rn}}{r_1} - [u \sin \varphi_{rn} \cos \alpha (r_i - u \sin \alpha) \text{ctg} \alpha]}{\left(\cos \varphi_{rn} \frac{r_1}{z_k} + u \sin \alpha \right) r_1} . \quad (25)$$

Рассмотрим сечение арочного зуба плоскостью, параллельной торцевой с координатой $X = \pm \delta_0$. Это сечение определяется условием

$$\varphi_{rn} = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi \right) z_k . \quad (26)$$

При этом $\sin \varphi_{r1} = -1$, $\cos \varphi_{r1} = 0$.

Уравнение станочного зацепления в указанном сечении будет иметь вид

$$(r_i - u \sin \alpha) = r_1 \varphi_0 \sin^2 \alpha . \quad (27)$$

Тогда уравнения, описывающие профиль зуба в сечении с координатой x^c , имеют вид

$$y_1 = (r_i \text{ctg} \alpha - u \cos \alpha + r_1) \sin \varphi_\Sigma + (r_i - u \sin \alpha - r_1 \varphi_0) \cos \varphi_\Sigma ; \\ z_1 = (r_i \text{ctg} \alpha - u \cos \alpha + r_1) \cos \varphi_\Sigma - (r_i - u \sin \alpha - r_1 \varphi_0) \sin \varphi_\Sigma . \quad (28)$$

Уравнения (28), полученные с учетом (26) и (27), являются уравнениями эвольвенты.

Тогда полярное уравнение эвольвенты запишется в виде

$$\rho_\Sigma = (y_1^2 + z_1^2)^{0.5} = r_1 [\varphi_0^2 \cos^4 \alpha + (1 + \varphi_0 \sin \alpha \cos \alpha)^2]^{0.5} . \quad (29)$$

Найдем радиус основной окружности эвольвенты, на которой лежит ее точка возврата, в которой справедливо условие $\frac{d\rho_s}{d\varphi_0} = 0$.

Вычисляя производную и приравняв ее к нулю, получим $\varphi_0^* = -\operatorname{tg}\alpha$.

Подставляя полученное значение угла φ_0^* в полярное уравнение эвольвенты, получим радиус окружности $\rho^* = r_1 \cos \alpha$, с которой разворачивается эвольвентный профиль зуба в сечении, параллельном торцу с координатой $x_1 = \delta_0$.

Покажем, что линия зацепления в этом сечении является прямой линией. Преобразование уравнения (24) дает в неподвижной системе координат выражение $y^H \operatorname{tg}\alpha + (z^H - r_1) = 0$.

В связи с тем, что формообразование арочных зубьев цилиндрических колес в рассматриваемом случае осуществляется одной производящей линией, совершающей два независимых движения, одно из которых является движением обкатки, возможно подрезание боковой поверхности зуба нарезаемого шкива.

Ранее были подробно исследованы условия подрезания при таком способе формообразования [3] на основе совместного решения уравнений, описывающих боковую поверхность зуба,

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \bar{r}_1(u, \varphi_{r1}, \varphi_0); \\ f(u, \varphi_{r1}, \varphi_0) &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

и уравнение подрезания, которые можно представить в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_{r1}} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \\ E & F & \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi_0} \\ F & G & \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi_0} \end{vmatrix} = 0, \quad (31)$$

где второе уравнение системы (30) является уравнением станочного зацепления и в векторной форме имеет вид $(\partial \bar{r}_1 / \partial u \times \partial \bar{r}_1 / \partial \varphi_{r1}) \partial \bar{r}_1 / \partial \varphi_0 = 0$, а компоненты первой строки определителя — частные производные от левой части уравнения зацепления по соответствующим параметрам. Коэффициенты первой квадратичной формы E, F, G (31) рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x^H}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^H}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^H}{\partial u} \right)^2 = 1; \\ F &= \frac{\partial x^H}{\partial u} \left(\frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}} + \frac{y^H}{z_k} \right) - \frac{\partial y^H}{\partial u} \frac{x^H}{z_k} + \frac{\partial z^H}{\partial u} \frac{\partial z^H}{\partial \varphi_{r1}}; \\ \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi_0} &= \frac{\partial x^H}{\partial u} \left(\frac{\partial x^H}{\partial \varphi_0} + y^H \right) - \frac{\partial y^H}{\partial u} x^H; \\ G &= \left(\frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}} + \frac{y^H}{z_k} \right)^2 + \left(\frac{x^H}{z_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^H}{\partial \varphi_{r1}} \right)^2; \\ \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi_{r1}} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi_0} &= \left(\frac{\partial x^H}{\partial \varphi_{r1}} + \frac{y^H}{z_k} \right) \left(\frac{\partial x^H}{\partial \varphi_0} + y^H \right) + \frac{(x^H)^2}{z_k}. \end{aligned} \quad (32)$$

Установлено, что точка подрезания в сечении, параллельном торцу с координатой $X_r = 0$, расположена на большем радиусе от оси вращения шкива, чем на торцах, поэтому, определив

ребро возврата в этом сечении, безусловно гарантируем отсутствие подрезания в остальных сечениях. Отметим, что в упомянутом сечении шкива координата точки подрезания, рассчитанная с помощью совместного решения уравнений (30),(31), совпадает с ее значением, вычисленным по известной формуле

$$h_a = r_2 \sin^2 \alpha, \quad (33)$$

полученной для плоского случая прямозубого эвольвентного зацепления (рис. 5).

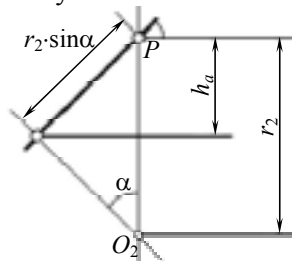


Рис. 5. Схема определения точки подрезания для плоского эвольвентного профиля

Параметр h_a обозначает высоту головки зуба инструмента, r_2 — радиус колеса, на котором лежит точка возврата, α — угол исходного контура. Установленное совпадение численных значений координат точки подрезания в плоском и пространственном (при $x_r = 0$) случае, а также анализ результатов подрезания [3] позволяют определить минимальное число арочных зубьев нарезаемого шкива.

Известно решение задачи о нахождении минимального числа зубьев для плоского зубчатого зацепления с эвольвентным профилем, нарезаемого плоским исходным контуром,

$$z_{\min} = 2h_a^* / \sin^2 \alpha, \quad (34)$$

где $h_a^* = h_a / m$,

m — модуль исходного контура.

Для определения минимального числа зубьев шкива с арочными зубьями, нарезаемого способом непрерывного деления, поставим условие, чтобы в сечении шкива при $x_r = 0$ высота профиля зуба ограничивалась на его ножке точкой возврата, лежащей на ребре возврата боковой поверхности. Полагаем высоту головки инструмента (резцовой головки) равной $h_a = h_a^* m$. Необходимо чтобы "уравнение подрезания" (31) удовлетворялось в точке возврата, в которой выполняются соотношения

$$u = \frac{r_i}{\sin \alpha} + \frac{h_a}{\cos \alpha}, \quad \varphi_{r1} = \frac{3\pi}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{-h_a}{r_1 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Подставив полученные значения в уравнение подрезания, имеем

$$\begin{vmatrix} -\frac{r_i}{\sin \alpha} + \frac{h_a}{\cos \alpha} & \frac{r_1 h_a \operatorname{ctg} \alpha}{z_k} - r_1 \sin \alpha \left[\frac{r_i}{\sin \alpha} + \frac{h_a}{\cos \alpha} \right] \\ 1 & \frac{1}{z_k} \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha \right] & \frac{h_a}{\sin \alpha} \\ \frac{1}{z_k} \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha \right] & G & \frac{h_a}{z_k \sin \alpha} \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha \right] \end{vmatrix} = 0,$$

где $G = (r_i + h_a \operatorname{tg} \alpha)^2 + \frac{h_a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + (r_1 - h_a)^2}{z_k^2}$.

Преобразуя приведенный определитель к виду

$$\begin{vmatrix} -\left[\frac{r_i}{\sin \alpha} + \frac{h_a}{\cos \alpha}\right] & \frac{r_1 h_a \operatorname{ctg} \alpha}{z_k} \left[\frac{r_i}{\sin \alpha} + \frac{h_a}{\cos \alpha}\right] & \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha\right] \\ 1 & \frac{1}{z_k} \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha\right] & 0 \\ \frac{1}{z_k} \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha\right] & G & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

и раскрывая его по элементам третьего столбца, получим уравнение для определения высоты головки h_a лезвийного инструмента (или радиуса r_1 нарезаемого шкива), при которых в указанной точке профиль нарезаемого зуба будет иметь точку возврата

$$\left[G - \frac{1}{z_k} \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha \right]^2 \right] \cdot \left[\frac{r_i}{\sin \alpha} + \frac{h_a}{\cos \alpha} \right] \cdot \left[\frac{h_a}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha \right] = 0 \quad (35)$$

Первый множитель, стоящий в левой части, представляет собой квадрат векторного произведения $(\vec{r}_u \times \vec{r}_{\varphi_{r1}})^2$, который не обращается в ноль. Второй множитель тоже не равен нулю, т.к. в противном случае получающаяся из него величина h_a будет отрицательной, что противоречит физическому смыслу задачи. Поэтому рассмотрим обращение в ноль третьего множителя

$$h_a / \sin \alpha - r_1 \sin \alpha = 0. \quad (36)$$

Соотношение (36) позволяет ответить на вопрос о минимальном числе зубьев нарезаемого шкива. Полагая известной высоту головки реза $h_a = h_a^* m$, найдем радиус шкива r_1^* , на котором лежит точка возврата профиля зуба шкива в сечении, параллельном торцу, совпадающем с осью вращения режущей головки ($X_r = 0$),

$$r_1^* = h_a^* m / \sin^2 \alpha.$$

Заменяя в этой формуле $r_1^* = m z_k / 2$, получим минимальное число зубьев шкива с арочной формой зубьев

$$z_{\min} = 2 h_a^* / \sin^2 \alpha.$$

Найденная формула совпадает с формулой (34), что позволяет утверждать, что арочные зубья шкива, нарезаемые режущими головками рассматриваемым способом, имеют те же ограничения на минимальное количество зубьев, что и прямозубые колеса с эвольвентным профилем, нарезаемые стандартным исходным контуром.

Полученные зависимости позволили определить геометрические характеристики арочных зубьев ремня и шкива, зазоров между ними, что дает возможность проектировать передачу с базированием зубьев по боковой поверхности или поверхности вершин зубьев в зависимости от целевого назначения передачи.

На основе полученных зависимостей установлены соотношения радиуса режущей головки и ширины венца шкива, позволяющие оптимизировать толщину зубьев на торцах, величину осевого перекрытия и угол станочного зацепления, оказывающих влияние на прочность арочных зубьев и плавность их пересопряжения.

Литература

1. Кравцов, Э.Д. Геометрия круговых зубьев в передаче зубчатым ремнем / Э.Д. Кравцов, Р.А. Мачей // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2008. — Вып. 1(29). — С. 36 — 39.

-
2. Догода, М.М. Уравнение производящей поверхности экспериментального зуборезного станка модели ЕЗ-67 / М.М. Догода, Р.А. Мацей // Металлорежущие станки: респ. межвед. научн. техн. сб. — К.: Техника, 1981. — Вып. 9. — С. 62 — 65.
 3. Васильев, В.М. Подрезание боковых поверхностей арочных зубьев при нарезании на экспериментальном зуборезном станке мод. ЕЗ-67 / В.М. Васильев, Р.А. Мацей // Респ. межвед. научн. техн. сб. — К.: Техника, 1988. — Вып. 16. — С. 94 — 96.

Рецензент д-р техн. наук, доц. Одес. нац. политехн. ун-та Сидоренко И.И.

Поступила в редакцию 20 мая 2008 г.

